

# **Laskentaohjelman kehittäminen puu- välipohjan värähtelymitoitukseen**

Jere Kosunen

Opinnäytetyö  
Huhtikuu 2020  
Tekniikan ala  
Insinööri (AMK), rakennus- ja yhdyskuntatekniikka

Tekijä(t) Kosunen, Jere	Julkaisun laji Opinnäytetyö, AMK	Päivämäärä Huhtikuu 2020
	Sivumäärä 59	Julkaisun kieli Suomi
	-	Verkojulkaisulupa myönnetty: x
Työn nimi <b>Laskentaohjelman kehittäminen puuvälipohjan värähtelymitoitukseen.</b>		
Tutkinto-ohjelma Rakennus- ja yhdyskuntatekniikka		
Työn ohjaaja(t) Maija Tiainen, Haapamaa Hannu, Viinikainen Marko		
Toimeksiantaja(t) Sweco Rakennetekniikka Oy		
<p>Tiivistelmä</p> <p>Opinnäytetyön taustalla vaikutti tarve yksinkertaiseen ja helppokäyttöiseen laskentaohjelmaan korkeataajuuslattian värähtelykriteerien laskennassa. Ohjelman täytyi kyetä jatkuvien ja ortotrooppisten rakenteiden analysointiin. Tehtäväksi muodostui ohjelman kehittäminen hyödyntäen elementtimenetelmää ja ominaismuotoanalyysiä. Ominaismuotoanalyysin suorittamisessa ohjelma hyödyntää vapaan lähdekoodin Math.Net Numerics -kirjastoja. Tavoitteeksi asetettiin mahdollisuus jatkuvien palkkien ja suorakaiteen muotoisten arinalaattojen mitoitukseen korkeataajuuslattioina.</p> <p>Ohjelmointityö toteutettiin Microsoft Visual Studio Professional -versiolla. Ohjelma käyttää elementtityyppinä avaruuspalkkiin pohjautuvia elementtejä, pääasiassa arinaelementtejä. Ohjelmointi toteutettiin C# -ohjelmointikielellä, hyödyntäen olio-ohjelmointia.</p> <p>Työn tuloksena saatiin korkeataajuuslattioiden värähtelymitoitukseen soveltuva elementtimenetelmä hyödyntävä sovellus. Ohjelma soveltuu jatkuviin palkkeihin sekä muihin staattisesti määräämättömiin rakenteisiin, joissa ei ole sisäisiä vapausasteita. Toteutettu ohjelma ei sovellu epälineaariseen analyysiin.</p> <p>Elementtimenetelmän automatisointi värähtelymitoituksen avuksi oli hyödyllistä. Työtä voidaan käyttää yhdessä esimerkiksi Pupax-, Finnwood- tai Excel-mitoitusohjelmien kanssa jatkuvien välipohjien mitoittamiseen. Arinapalkiston laskentamahdollisuus geometrisesti monimuotoisten välipohjien osalta helpottaa ja nopeuttaa korkeataajuuslattioiden värähtelymitoitusta.</p>		
Avainsanat (asiasanat) Elementtimenetelmä, ominaismuotoanalyysi, ristiin laminoitu puu, värähtelymitoitus		
Muut tiedot (Salassa pidettävät liitteet)		

Author(s) Kosunen, Jere	Type of publication Bachelor's thesis	Date April 2020
		Language of publication: Finnish
	Number of pages 59	Permission for web publication: x
Title of publication <b>Software development for vibration analysis of wooden floors</b>		
Degree programme Construction and civil engineering		
Supervisor(s) Maija Tiainen, Haapamaa Hannu, Viinikainen Marko		
Assigned by Sweco Rakennetekniikka Oy		
<p>Abstract</p> <p>The background of the thesis was influenced by the need for a simple and easy-to-use calculation program for calculating the vibration criteria of a high-frequency floor. The program had to be able to analyze continuous and orthotropic structures. The purpose of the thesis was to develop the program using the finite element method and modal analysis. To perform the modal analysis, the program utilizes the open source code Math.Net Numerics library. The goal was the possibility to analyze continuous beams and rectangular grillage slabs as high-frequency floors.</p> <p>The programming work was implemented with the Microsoft Visual Studio Professional version. The program uses elements based on the space beam, mainly the grillage element, as the element type. The programming was implemented in the C # programming language, utilizing object-oriented programming.</p> <p>As a result of the thesis, an application utilizing the finite-element method suitable for vibration measurement of high-frequency floors was obtained. The program is applicable for continuous beams, as well as other statically indeterminate structures that do not have internal degrees of freedom. The implemented program is not suitable for nonlinear analysis.</p> <p>The automation of the finite element method to support the vibration analysis was useful. The program can be used with, for example Pupax, Finnwood or Excel analysis programs to design continuous floors. The possibility of calculating the grillage system for geometrically diverse floors assists and speeds up the vibration analysis of high-frequency floors.</p>		
Keywords/tags (subjects) Finite element method, modal analysis, cross-laminated timber, vibration analysis		
Miscellaneous (Confidential information)		

## Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto .....</b>	<b>5</b>
1.1	Toimeksianto .....	5
1.2	Toimeksiantaja .....	6
1.3	Tutkimusmenetelmät .....	6
<b>2</b>	<b>Lattioiden värähtelymitoitus.....</b>	<b>7</b>
2.1	Värähtelyn vaikutus asumismukavuuteen .....	7
2.2	Värähtelyn arvioiminen laskennallisesti.....	8
2.3	Askelheräte.....	13
<b>3</b>	<b>CLT-lattian erityispiirteet .....</b>	<b>14</b>
3.1	CLT rakennusmateriaalina .....	15
3.2	CLT rakenteen mitoitus värähtelylle .....	17
<b>4</b>	<b>Elementtimenetelmä .....</b>	<b>20</b>
4.1	Siirtymämenetelmä ja staattisen solmutasapainon ratkaisu.....	22
4.2	Avaruuspalkki .....	23
4.3	Avaruuspalkin jäykkyys- ja massamatriisi .....	24
4.4	Solmumittausjärjestelmä .....	26
4.5	Elementtien yhdistäminen globaaliksi rakenteeksi.....	28
4.6	Värähtelyn analysoiminen elementtimenetelmällä.....	28
<b>5</b>	<b>Tulokset .....</b>	<b>30</b>
5.1	Laskentaprosessin eteneminen kehitetyssä ohjelmassa .....	30
5.2	Vertailulaskelmat.....	34
5.3	Ohjelman luotettavuus ja käytettävyys .....	35
5.4	Ohjelman tarkastaminen pienellä rakennemallilla .....	36
5.5	Tulosten tarkkuus .....	39
5.6	Ohjelman käyttömahdollisuudet rakennesuunnittelussa.....	41

<b>6</b>	<b>Pohdinta.....</b>	<b>42</b>
	<b>Lähteet .....</b>	<b>46</b>
	<b>Liitteet .....</b>	<b>48</b>
	Liite 1. Palkin vertailulaskelmat .....	48
	Liite 2. Suorakulmaisen laatan vertailulaskelmat .....	52

## Kuviot

Kuvio 1. Värähtelyn vaikutus ihmiseen.....	8
Kuvio 2. CLT:n perusrakenne .....	14
Kuvio 3. Vierintäleikkausilmiö .....	16
Kuvio 4. CLT-materiaalina .....	16
Kuvio 5. CLT poikkileikkaus .....	19
Kuvio 6. Fysikaalisen ongelmanratkaisun periaate.....	21
Kuvio 7. Avaruussauvan vapausasteet .....	23
Kuvio 8. Avaruuspalkin jäykkyyismatriisi .....	25
Kuvio 9. Tasopalkin massamatriisi .....	26
Kuvio 10. Paikallinen ja globaali koordinaatisto .....	28
Kuvio 11. Esimerkki ohjelman solmutaulukosta.....	30
Kuvio 12. Esimerkki vapausasteluettelosta. ....	31
Kuvio 13. Esimerkki siirtymätaulukosta.....	32
Kuvio 14. Esimerkki tulostaulukosta.....	34
Kuvio 15. Yksinkertainen rakennemalli tarkastusta varten. ....	36
Kuvio 16. Vapausastetaulukko tarkastettavalle rakenteelle. ....	36
Kuvio 17. Solmu- ja sauvataulukko tarkastusta varten. ....	37
Kuvio 18. Globaali jäykkyyismatriisi ja massamatriisi.....	38
Kuvio 19. Ohjelman vastaus esimerkkirakenteelle.....	39

**Taulukot**

Taulukko 1. Värähtelyluokat .....	11
Taulukko 2. Värähtelyluokkien soveltaminen .....	11
Taulukko 3. Värähtelykriteerit .....	12
Taulukko 4. Vertailulaskelmien yhteenveto: Palkit .....	40
Taulukko 5. Vertailulaskelmien yhteenveto: Laatat .....	40

## Käsitteet ja merkinnät

$K_e$  = Jäykkyysmatriisi:

Valitun elementin jäykkyyskertoimien taulukko vapausasteittain. Elementin jousivakio.

$M_e$  = Massamatriisi:

Valitun elementin massan taulukko vapausasteittain.

$T$  = Koordinaatiston muunnosmatriisi:

Taulukko suuntakosineille valitun elementin jäykkyys- ja massaominaisuuksien kääntämiseksi paikallisesta globaaliin koordinaatistoon elementin globaalien koordinaattien perusteella.

Globaali jäykkyysmatriisi  $K'$ :

Elementeistä muodostetun systeemin jäykkyysmatriisi globaalissa koordinaatistossa. Rakenteen jousivakio.

Globaali massamatriisi  $M'$ :

Elementeistä muodostetun systeemin massamatriisi globaalissa koordinaatistossa.

Laskentasolmu:

Interpolointipiste. Koordinaatti, jossa ratkaistaan valitut tuntemattomat suureet. Esimerkiksi siirtymämenetelmää käytettäessä siirtymä.

Ominaisarvo ja ominaisvektori:

Ominaisvektorin ja ominaisarvon määritelmän mukaan matriisin kertominen ominaisvektorilla täytyy antaa saman tuloksen kuin kertominen skalaarilla. Kyseinen vektori on tällöin matriisin ominaisvektori ja skalaari ominaisvektoria vastaava ominaisarvo.

Ominaistaajuus  $\omega$ :

Rakenteen alin ominaistaajuus on taajuus, jolla rakenne helpoimmin värähtelee. Tällä taajuudella rakenne myös helpoimmin alkaa resonoida. Ominaistaajuuteen vaikuttavat rakenteen geometria, jäykkyysominaisuudet ja massa.

Tehollinen massa:

Kunkin ominaismuodon mukaisessa vapaassa värähtelyssä mukana oleva tehollinen massa. Modal effective mass.

# 1 Johdanto

## 1.1 Toimeksianto

Tämän opinnäytetyön tavoitteena on kehittää Sweco Rakennetekniikka Oy:lle toimiva, luotettava ja yksinkertainen tietokoneohjelma puuvälipohjien vapaan värähtelyn analysointiin elementtimenetelmällä. Tarve analysoida värähtelyä elementtimenetelmällä johtuu nykyisistä trendeistä, joissa asuntojen välipohjat ovat yhä useammin geometrisesti monimuotoisia.

Geometrian monimuotoisuus aiheuttaa laskennan kannalta haasteita, koska värähtelyn analysointiin eurokoodissa ja siihen pohjautuvissa mitoitusohjeissa laskentakaavat rajoittuvat suorakulmaisten vapaasti tuettujen yksiaukkoisten rakenteiden laskentaan. Myös CLT-välipohjien yleistyminen ja näiden mahdollinen käyttö ristiin kantavana rakenteena aiheuttaa tarpeen analyttisiä kaavoja monipuolisemmalle työkäluille.

Yrityksen käytössä aiemmin olleet laskentapohjat ovat rajoittuneita rakennemallin suhteen. Elementtimenetelmää hyödyntävällä laskentaohjelmalla voidaan korvata aiempia laskentapohjia ja lisäksi ohjelmalla pystytään analysoimaan jatkuvia ja monipuolisesti tuettuja välipohjia. Myös vinoreunaisten välipohjien analysointi onnistuu elementtimenetelmällä, mutta tämän työn yksinkertaistuksen takia tulosten tarkkuus ei välttämättä ole riittävä. Yksinkertaistus tarkoittaa, että välipohja mallinnetaan palkkielementtien avulla niin kutsutulla arinaelementillä, joten ohjelma ei huomioi materiaalin ominaisuuksista suppeumalukua. Toisaalta ohjelman käyttämä laskentaelementti soveltuu erittäin hyvin esimerkiksi teräsrunkoiseen välipohjaan, jossa teräspalkit on liitetty toisiinsa momenttijäykästi.

Tietokoneohjelma ohjelmoidaan Microsoft Visual Studiolla käyttäen C#-kieltä. Lisäksi ominaisarvoanalyysissä hyödynnetään vapaan lähdekoodin Math.NET Numerics dynaamista kirjastoa.



## 1.2 Toimeksiantaja

Työn toimeksiantajina toimivat Sweco Rakennetekniikka Oy:n Teknologiayksikön ja Jyväskylän yksikön Talonrakennusosasto 2. Esimieheni ehdotuksesta työn aiheeksi valikoitui puuvälipohjan värähtelymitoituksen kehittäminen yhtiössä.

Sweco Rakennetekniikka Oy on Sweco Finland Oy:n tytäryhtiö, jonka tehtävänä on huolehtia konsernin Suomen rakennesuunnittelun toimialasta. Yhtiön tavoitteena on olla luotetuin ja arvostetuin toimija alallaan. Sweco Rakennetekniikka Oy:n liikevaihto oli 72,5 miljoonaa euroa vuonna 2018.

Talonrakennusosasto 2 toimii pääosin rakenne- ja elementtisuunnittelijana pääasiassa julkisrahoitteisissa suurehkoissa ja keskisuurissa hankkeissa. Osasto on erikoistunut koulu- ja päiväkotihankkeisiin.

## 1.3 Tutkimusmenetelmät

Tutkimuksessa hyödynnetään kvalitatiivista- ja toiminnallista tutkimusotetta. Laadullinen eli kvalitatiivinen tutkimuksen osa on ongelmanratkaisun kannalta oleellisen teoreettisen tiedon etsiminen ja esittäminen johdonmukaisesti sekä ymmärrettävässä muodossa. Laadullisen tutkimuksen tutkimusmenetelmänä käytetään kirjallisuusselvitystä.

Toiminnallisen tutkimuksesta tekee tietokoneohjelman rakentaminen ongelmanratkaisuun. Ohjelman rakentaminen perustuu laadulliseen tutkimukseen ja tämän tutkimuksen antamiin tuloksiin. Lisäksi ohjelman testaaminen ja vertailulaskelmien toteuttaminen ovat tutkimusotteeltaan toiminnallista tutkimusta. Tietokoneohjelman tulosten vertailun avulla tutkitaan, kuinka ohjelmaa voidaan lopulta käytännön rakennesuunnittelussa hyödyntää.

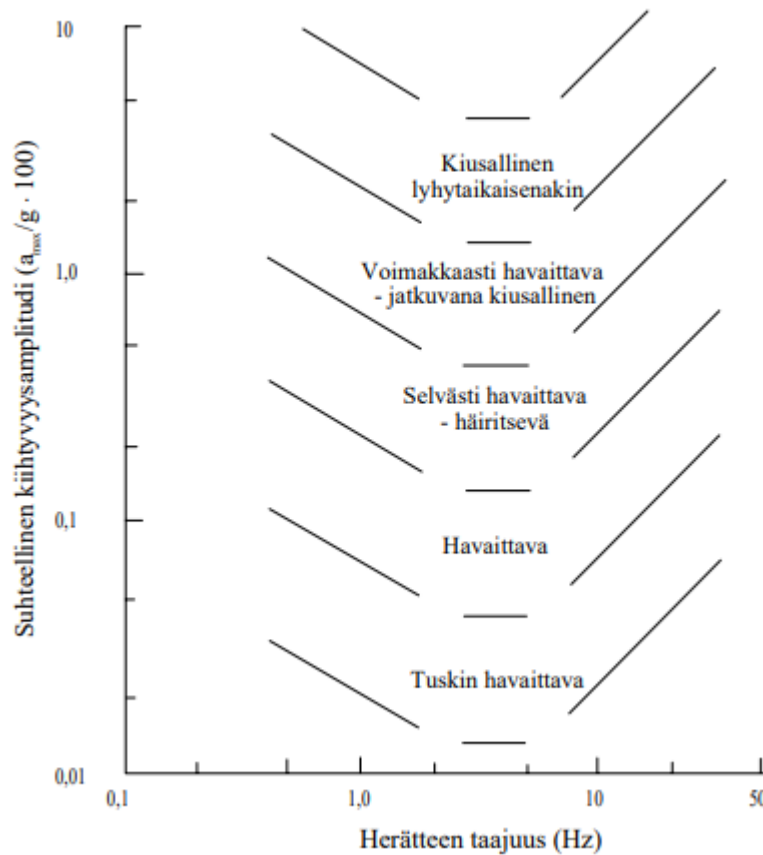
## 2 Lattioiden värähtelymitoitus

Mekaniikassa värähtelyllä tarkoitetaan fysikaalista ilmiötä, jossa systeemi liikehtii tasapainoasemansa ympärillä. Värähtely voi olla herätteen aiheuttamaa pakkovärähtelyä tai ominaisvärähtelyä. Ominaisvärähtelyssä ei huomioida vaimennusta eikä herätettä. (Pennala 1999, 11.)

### 2.1 Värähtelyn vaikutus asumismukavuuteen

Ihminen aistii pieniäkin värähtelyjä ja värähtelyn aiheuttamia ääniä tai liikkeitä. Värähtelyn vaikutusta ihmiseen on tutkittu kokeellisesti. Värähtelymitoituksessa pyritään mitoittamaan rakenne siten, ettei värähtelyä koeta häiritseväksi. Värähtelyn häiritsevyyttä on tutkittu kokeellisesti ja näiden tutkimusten perusteella on tehty nykyiset mitoitusohjeet. (Talja, Toratti & Järvinen 2002, 3.)

Kävely on useimmiten tarkasteltava heräte lattiarakenteissa. Asuin- ja toimistotilat mitoitetaan kävelyherätteelle. Tiloissa voi tuki esiintyä voimakkaampiakin jaksottaisia värähtelyä aiheuttavia herätteitä, mutta näin on harvemmin. Epämiellyttävänä yleisimmin koetaan kantapään iskun aiheuttama tärinä, lattian notkuminen ja kasvien sekä huonekalujen liike. Asuin- ja toimistotiloissa suunnitteluperusteena käytetään kävelyherätettä, jollei toisin vaadita. (Talja, Toratti & Järvinen 1999, 9.) Tässä opin-  
nätetyössä mitoitetaan lattiaa vain kävelyherätteelle.



Kuvio 1. Värähtelyn vaikutus ihmiseen (Talja, 1996, 15.)

## 2.2 Värähtelyn arvioiminen laskennallisesti

Suurimmat lattian värähtelyyn vaikuttavat tekijät ovat massa, rakenteen jäykkyys ja jänneväli. Massan kasvaessa ominaistaajuus yleensä pienenee ja tällöin myös vaimennuksen vaikutus tulokseen kasvaa. Värähtelevän massan ollessa suuri herätteen verrattuna värähdysliikettä hallitsee ominaisvärähtely. Massan ollessa pieni ja ominaistaajuuden suuri herätteen suhteellinen vaikutus kasvaa ja haitalliseksi muodostuu lattian taipuma. Tästä johtuu lattioiden jako korkea- ja matalataajuuslattioihin. Matalataajuiset lattiat ovat usein jänneväliltään pitkiä ja raskaita. Korkeataajuiset lattiat taas ovat usein keveitä. (Talja, Toratti & Järvinen 2002, 9-11.)

Eurokoodin suunnitteluperusteissa lattian värähtely luokitellaan käyttökelpoisuuskriteerin avulla. Kriteerit ovat raja-arvoja, joilla rajoitetaan rakenteen ominaisuuksia siten, että käyttäjän mukavuus ja rakenteen tai rakenneosan toimivuus huomioidaan.

Muutoin toimitaan, kuten kyseisessä hankkeessa osapuolten välillä sovitaan. Hankkeen tilaajan tulee hyväksyä valittu toimintatapa. (Rakenteiden lujuus ja vakaus 2016, 18.)

Rakenneosaa rajoitetaan käyttörajatilamitoituksessa värähtelyn osalta ominaistajuuden alaraja-arvolla 8 Hz. Suomen kansallisessa liitteessä arvo on 9 Hz (Rakenteiden lujuus ja vakaus 2016, 18). Mikäli ominaistajuus on liian matala, suoritetaan tarkempi analyysi rakenteen dynaamisesta vasteesta. Analyysissä tulee ottaa huomioon rakenteen vaimennussuhde. Suositeltuna vaimennussuhteena voidaan käyttää 0,01, jos parempaa tietoa ei ole. Rakennuksen suunnittelussa tulee ottaa huomioon kävely, ihmisten saman tahtiset liikkeet, koneet, maaperän ja liikenteen aiheuttama värähtely sekä tuulen vaikutus. (SFS-EN 1995-1-1 + A1 + A2 + AC:2014, 51.)

Eurokoodin puurakenteiden suunnittelua koskevan kansallisen liitteen mukaan voidaan käyttää mitoitusmenetelmää, jossa värähtelyä rajoitetaan ominaistajuuden ja suurimman taipuman mukaan. Arvoja ja menetelmää voi vapaasti käyttää myös moniaukkoisten rakenteiden mitoitukseen. Tässä menetelmässä annetaan myös käsin laskentaan soveltuvat kaavat (kaavat 2 ja 3), joita käytetään vertailulaskelmissa. (Rakenteiden lujuus ja vakaus 2016, 19.)

Värähtelyn mitoitusta eurokoodi ja kansallinen liite eivät ohjeista kovin tarkasti. VTT:n kehittämä värähtelyluokkiin perustuva mitoitusmenetelmä antaa yksityiskohtaisemman ohjeistuksen ja enemmän työkaluja lattioiden värähtelysuunnitteluun. Eurokoodi ei anna selkeää ohjeistusta elementtimenetelmän käytöstä lattioiden värähtelysuunnittelussa.

Yhteen suuntaan kantavan välipohjan alin ominaistaajuus voidaan laskea kaavalla 2:

$$f_1 = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{(EI)_l}{m}} \quad (2)$$

Kahteen suuntaan kantavan välipohjan alin ominaistaajuus voidaan laskea kaavalla 3:

$$f_1 = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{(EI)_l}{m}} \cdot \sqrt{1 + \left[ 2 \cdot \left( \frac{l}{b} \right)^2 + \left( \frac{l}{b} \right)^4 \right] \cdot \frac{(EI)_b}{(EI)_l}} \quad (3)$$

missä

$l$  on lattiarakenteen jänneväli [m]

$b$  on lattiarakenteen leveys [m]

$(EI)_l$  on lattian kantavaa suuntaa  $l$  vastaava taivutusjäykkyys leveysyksikköä kohti [Nm<sup>2</sup>/m]

$(EI)_b$  lattian poikittaissuuntaa  $b$  vastaava taivutusjäykkyys leveysyksikköä kohti [Nm<sup>2</sup>/m]

$m$  on lattian oman painon pinta-alayksikköä kohden ja hyötykuormasta osuuden 30 kg/m<sup>2</sup> yhteen laskettu massa [kg/m<sup>2</sup>].

VTT:n mitoitusmenettelyehdotuksessa lattian värähtelyä kuvataan viidellä eri luokalla A-E. Jokaisella värähtelyluokalla on reunaehdot taipumille, ominaistaajuudelle ja kiihtyvyydelle. Värähtelyluokat on kehitetty kuvaamaan lattian värähtelyn häiritsevyyttä paikallaan istuvalle ihmiselle ja värähtelyn aiheuttaman esineiden liikkeen perusteella. (Talja, Toratti & Järvinen 2002, 16-17.)

Taulukko 1. Värähtelyluokat (Talja, Toratti &amp; Järvinen 1999, 16.)

Värähtelyiden aistittavuus kehon tunte- muksen perusteella		Värähtelyiden aistittavuus esineisiin synty- vän värähtelyn perusteella	
A	Värähtely ei ole yleensä havaitta- vissa.	1	Astioiden kilinää ja kasvin lehtien heilumista ei yleensä esiinny.
B	Värähtely on juuri havaittavaa.	2	Astioiden kilinää ei yleensä esiinny ja kasvin lehtien heiluminen on juuri havaittavaa.
C	Värähtely on havaittavaa.	3	Astioiden kilinä on juuri havaittavaa. Kasvin lehtien heiluminen on ha- vaittavaa.
D	Värähtely on selvästi havaittavaa.	4	Astioiden kilinä ja kasvin lehtien heiluminen on selvästi havaittavaa.
E	Värähtely on voimakasta.	5	Astioiden kilinä ja kasvin lehtien heiluminen on voimakasta.

Värähtelyluokasta ei käy suoraan ilmi, millaisiin tiloihin ja käyttötarkoituksiin kyseisen värähtelyluokan lattiarakenne on soveltuva. Tilaaja määrittää lattioiden värähtelyluokalle omat vaatimuksensa, mikä voi vaikuttaa oleellisesti rakenteille vaadittuun värähtelyluokkaan. Värähtelyluokkien soveltamisesta on kuitenkin annettu alarajat VTT:n menetelmässä. (Talja, Toratti & Järvinen 2002, 16.)

Taulukko 2. Värähtelyluokkien soveltaminen (Talja, Toratti &amp; Järvinen 1999, 17.)

Lattian väräh- telyluokka	Sovelluskohde
A1	Normaaliluokka huoneistosta toiseen siirtyville värähtelyille. Erikoisluokka, kun värähtelyn aiheuttaja on samassa huoneistossa.
B2	Alempi luokka huoneistosta toiseen siirtyville värähtelyille. Ylempi luokka asuin- ja toimistorakennuksille, kun värähtelyn ai- heuttaja on samassa huoneistossa.
C3	Normaaliluokka asuin- ja toimistorakennuksille, kun värähtelyn ai- heuttaja on samassa huoneistossa.
D4	Alempi luokka asuinrakennuksille, kun värähtelyn aiheuttaja on sa- massa huoneistossa. Esim. omakotitalojen ullakot tai vapaa-ajan asunnot.
E5	Luokka, jolle ei aseteta rajoituksia.

Värähtelykriteerit riippuvat lattian alimmasta ominaistaajuudesta. Kriteerien tarkoitus on rajoittaa kyseisen lattian häiritsevempiä ominaisuuksia eli korkeataajuisella lattialla taipumia ja matalataajuisella lattialla kiihtyvyyksiä. Huomattavaa on, että taipumalle on asetettu kriteereitä myös paikallisesti. Tämä tarkoittaa, että lattian pintarakenne on tarkasteltava erikseen, jos lattiassa on erillinen pintarakenne. (Talja 1996, 27.)

Taulukko 3. Värähtelykriteerit (Talja, Toratti & Järvinen 1999, 19.)

Matalataajuuksiset lattiat		Korkeataajuuksiset lattiat, korotuslattiat ja kelluvat lattiat		Kaikki lattiat	
Kiihtyvyysehto		Taipumaehto		Kallistumaehto	
Luokka	$3 \text{ Hz} \leq f_0 \leq 10 \text{ Hz}$	Luokka	$f_0 > 10 \text{ Hz}$	Luokka	
A	$a \leq 0,03 \text{ m/s}^2$	A	$\delta \leq 0,12 \text{ mm}$	1	$\phi \leq 0,2 \text{ mm/1,2 m}$
B	$a \leq 0,05 \text{ m/s}^2$	B	$\delta \leq 0,25 \text{ mm}$	2	$\phi \leq 0,4 \text{ mm/1,2 m}$
C	$a \leq 0,075 \text{ m/s}^2$	C	$\delta \leq 0,5 \text{ mm}$	3	$\phi \leq 0,8 \text{ mm/1,2 m}$
D	$a \leq 0,12 \text{ m/s}^2$	D	$\delta \leq 1,0 \text{ mm}$	4	$\phi \leq 1,6 \text{ mm/1,2 m}$
E	$a > 0,12 \text{ m/s}^2$	E	$\delta > 1,0 \text{ mm}$	5	$\phi > 1,6 \text{ mm/1,2 m}$

Hyväksytyiksi laskentamenettelyiksi voidaan katsoa Suomessa kansallisen liitteen NCCI 2 esittämät laskentakaavat sekä VTT:n tutkimusraporteissaan esittämät laskentamenetelmät. Tilaajan tulee hyväksyä laskentamenetelmä. Lisäksi eurokoodin mukaan voidaan suorittaa tarkempi dynaaminen analyysi herätteelle, jolle kyseinen rakenne täytyy mitoittaa. (Rakenteiden lujuus ja vakaus 2016, 18.)

Laskentamenetelmien värähtelykriteerit on perinteisesti laskettu valmiilla niitä varten kehitetyillä laskentakaavoilla. Kuitenkin kriteerit ovat ratkaistavissa myös elementtimenetelmällä ja elementtimenetelmän käyttöä värähtelymitoituksessa ohjeistaa VTT tiedotteessaan 2124. (Talja, Toratti & Järvinen 2002, 3.)

Elementtimenetelmän käyttö rakennesuunnittelussa on yleistynyt tietokoneiden ja ohjelmien laskentatehon sekä tarkkuuden kehityksen myötä. Olennainen osa kehitystä on myös ohjelmien käyttäjäystävällisyyden ja tulosten luettavuuden kehitys. Myös dynaamisten analyysien käyttö on yleistynyt. Dynaaminen analysointi rakenteille elementtimenetelmää käyttäen on helpottunut merkittävästi.

## 2.3 Askelheräte

Askelherätettä on tutkittu kokeellisesti ja se voidaan matemaattisesti kuvata sarjakehitelmällä:

$$F = P \left[ 1 + \sum \alpha_i \cos(2\pi i f t) \right], \quad (1)$$

(Talja 1996, 10).

Jossa:

$P$  = Henkilön paino n.750 N

$if$  = Askeltaajuus

$t$  = Aika

$\alpha$  = Dynaaminen kuormakerroin

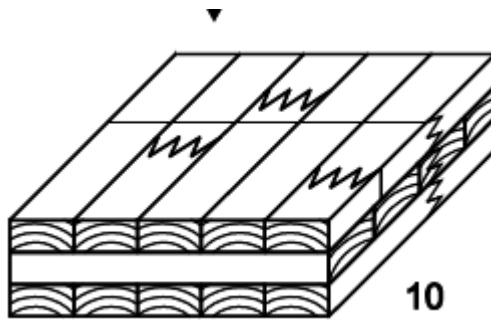
Kävelyheräte sisältää eri taajuuksilla esiintyviä komponentteja. Näitä komponentteja esiintyy taajuusvälillä 0-40 Hz. Komponentit jaetaan askelvälistä johtuvaan herätteen, jossa komponentit esiintyvät taajuusvälillä 0-8hz, sekä kantapään iskumaisiin komponentteihin taajuusvälillä 8-40 Hz. (Talja 1996, 9.)



Kävelyherätteen komponenttien taajuuksista johtuu lattioiden jako korkea- ja matalataajuuatlattioihin, sekä näiden erilaiset värähtelykriteerit. Matala- ja korkeataajuisen lattian ero on häilyvä ja todellisuudessa lattioissa esiintyvät värähtelyt ovat näiden askelherätekomenttien sekoituksia. Kuitenkin raja on asetettu useissa lähteissä 8-10 Hz. Tämä perustuu matalataajuisen lattian resonoinnin todennäköisyyden rajoittamiseen, koska askelherätteen askelvälistä johtuvan komponentin suurin arvo on 2,2 Hz ja tämän kolmannella monikerralla katsotaan vielä mahdollisesti esiintyvän todellisuudessa. (Talja 1996, 28.) Täten resonoinnin todennäköisyys pudotetaan erittäin pieneksi, kun lattian alin ominaistajuus ylittää askelherätteen askelvälin mahdolliset taajuuden. (Talja, Toratti & Järvinen 2002, 9.)

### 3 CLT-lattian erityispiirteet

CLT eli ristiin liimattu puu koostuu useammasta toisiinsa liimatuista lamelleista, jotka koostuvat vierekkäin ladotuista mahdollisesti pontatuista tai syrjältään liimatuista lamellilautoista. Lamellilautoja voidaan myös jatkaa sormiliitoksia.



Kuvio 2. CLT:n perusrakenne (SFS-EN 16351:2015, 7)

### 3.1 CLT rakennusmateriaalina

CLT eli ristiin liimattu puu on rakennesuunnittelun kannalta haastava. Materiaalin käyttö on yleistymässä ja sillä halutaan korvata usein betonirakenteita. Materiaalista haasteellisen rakennesuunnittelun kannalta tekee puun ortotrooppinen lujuuskäyttäytyminen sekä mitoitusohjeiden puutteet. CLT on vanha keksintö, mutta sen käyttö alkaa vasta nyt yleistyä Pohjoismaissa. Siksi myös mitoituskäytännöt ovat vielä vaihtelevia, eikä mitoitusohjeita eurokoodissa ole. (Sirkka & Pirttinen 2017, 7)

Puu on ortotrooppinen materiaali. Puun tapauksessa ortotrooppisuus johtuu puun syiden suunnasta. Puu on merkittävästi vahvempaa sen syysuunnassa kuin sitä vastaan. Tämä on helppo ottaa rakennesuunnittelussa huomioon, kun käsitellään rankarunkoja, joissa puusauvat ovat yksittäisiä, usein saman suuntaisia sauvoja. Tällöin lujuuden laskennassa käytetään vain jännityksen suuntaista lujuutta. (Kortesmaa 2007, 40.)

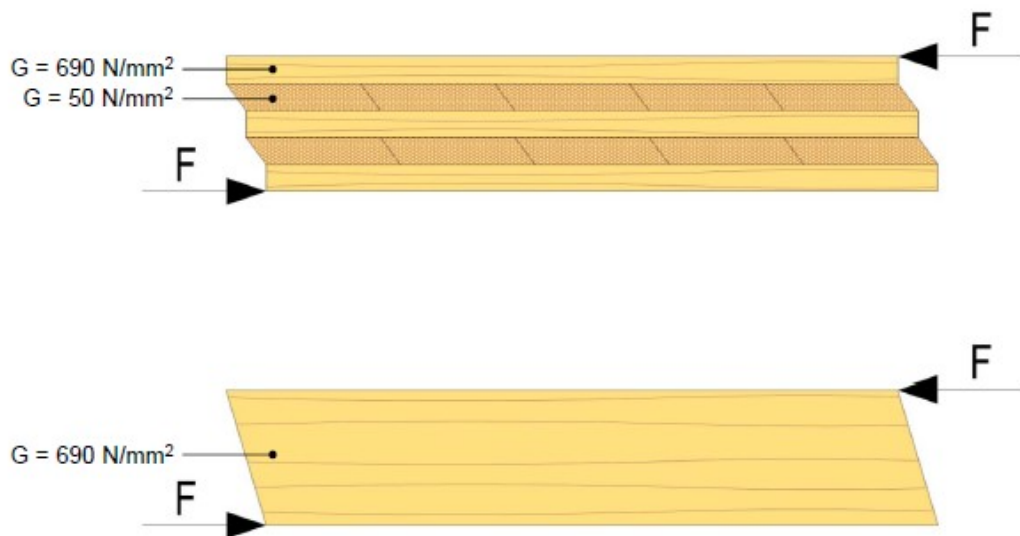
CLT-rakenteessa jännitykset jakautuvat sekä puun vahvemmalle että heikommalle suunnalle. Tämä tarkoittaa, että on osattava laskennallisesti jakaa jännitys sekä vahvemmalle että heikommalle puukomponentille rakenteen sisällä. Tämä on haasteellista, mutta tärkeää huomioida, koska jännitys puun syiden suuntaa kohtisuorassa aiheuttaa leikkausmuodonmuutoksia. Muodonmuutokset aiheuttavat taivutusjäykkyyden alenemista ja taipumien kasvamista (Borgström & Fröbel 2019, 25.)

Vierintäleikkaus johtuu puun syiden muodostamien vuosirenkaiden liukumisesta toisiinsa nähden (Borgström & Fröbel 2019, 25). Tällaista ei pääse käytännössä tapahtumaan muissa puurakenteissa, koska niissä jännitystä ei käytännössä koskaan johdeta puun syysuuntaa vastaan muodostuvalla leikkauskapasiteetilla (Kortesmaa 2007, 40). CLT-rakenteessa jännitys jakaantuu väistämättä myös tälle jäykkyydskomponentille. Siksi vierintäleikkaus täytyy huomioida rakenteita mitoittaessa. Vierintäleikkauksen vaikutus kasvaa rakenteen paksuuden kasvaessa. (Borgström & Fröbel 2019, 58.)

Vierintäleikkaus otetaan huomioon yleensä tehollista taivutusjäykkyyttä laskettaessa. Tähän on eri CLT-valmistajilla omat ohjeensa. Käytettävää CLT-materiaalia vastaavia suunnitteluohjeita tuleekin noudattaa, kun syötetään poikkileikkausarvoja opinnäytetyössä kehitettyyn laskentaohjelmaan.



Kuvio 3. Vierintäleikkausilmiö (Lahtela 2017.)



Kuvio 4. CLT-materiaalina (Lahtela 2017.)

Tehollisen poikkileikkauksen laskemisessa noudatetaan tällä hetkellä valmistajan ohjetta. Valmistajien ohjeet pääsääntöisesti käyttävät joustavasti kootun kerrospalkin teoriaan pohjautuvaa laskentamenettelyä. Laskentamenettelystä on annettu eurokoodissa yksinkertaistus. Tällöin laskennassa tarvitaan gammakerroin, jonka laskemiseen tarvitaan rakenteen jänneväliä. (SFS-EN 1995-1-1 + A1 + A2 + AC 2014, 102-104)

CLT-rakenne voidaan ottaa rakenteellisesti huomioon ristiin kantavana. Tällöin molemmissa suunnissa on laskettava tehollinen poikkileikkauksen taivutusjäykkyys ja rakenteen värähtelykriteerit lasketaan ortotrooppisena arinalaattana määrittäen molempiin suuntiin omat teholliset poikkileikkaukset. (Mylly 2016, 7)

### 3.2 CLT rakenteen mitoitus värähtelylle

CLT-rakenteen värähtelymitoitus eurokoodin ja useiden valmistajien ohjeiden mukaisella joustavasti kootun palkin teorialla ei poikkea kuin edellä kuvattujen tehollisten jäykkyyksien osalta. Tehollisten jäykkyyksien laskennassa jatkuvien rakenteiden osalta gammakerroin lasketaan käyttäen jännevälinä 0,8 kertaista aukon jännemittaa. Ulokkeiden osalta gammakerroin lasketaan kaksinkertaista ulokkeen mittaia käyttäen. (SFS-EN 1995-1-1 + A1 + A2 + AC 2014, 102).

Tämä tarkoittaa, että opinnäytetyössä kehitetyllä ohjelmalla voidaan laskea jatkuvia CLT-rakenteita laskemalla tehollinen poikkileikkaus kussakin aukossa ja käyttämällä kyseisessä aukossa aukon jännemitan ja edellä kuvattujen kertoimien mukaan laskettuja tehollisia poikkileikkauksia.

Tehollinen taivutusjäykkyys lasketaan eurokoodin mukaisessa yksinkertaistetussa menetelmässä seuraavilla kaavoilla:

$$(EI)_{ef} = \sum_{i=1}^3 (E_i I_i + \gamma_i E_i A_i a_i^2) \quad (4)$$

$$A_i = b_i h_i \quad (5)$$

$$I_i = \frac{b_i h_i^3}{12} \quad (6)$$

$$\gamma_2 = 1 \quad (7)$$

$$\gamma_i = \left[ 1 + \pi^2 E_i A_i s_i / (K_i \ell^2) \right]^{-1} \quad \text{arvoilla } i = 1 \text{ ja } i = 3 \quad (8)$$

$$a_2 = \frac{\gamma_1 E_1 A_1 (h_1 + h_2) - \gamma_3 E_3 A_3 (h_2 + h_3)}{2 \sum_{i=1}^3 \gamma_i E_i A_i} \quad (9)$$

(SFS-EN 1995-1-1 + A1 + A2 + AC:2014, 102-104).

Joissa:

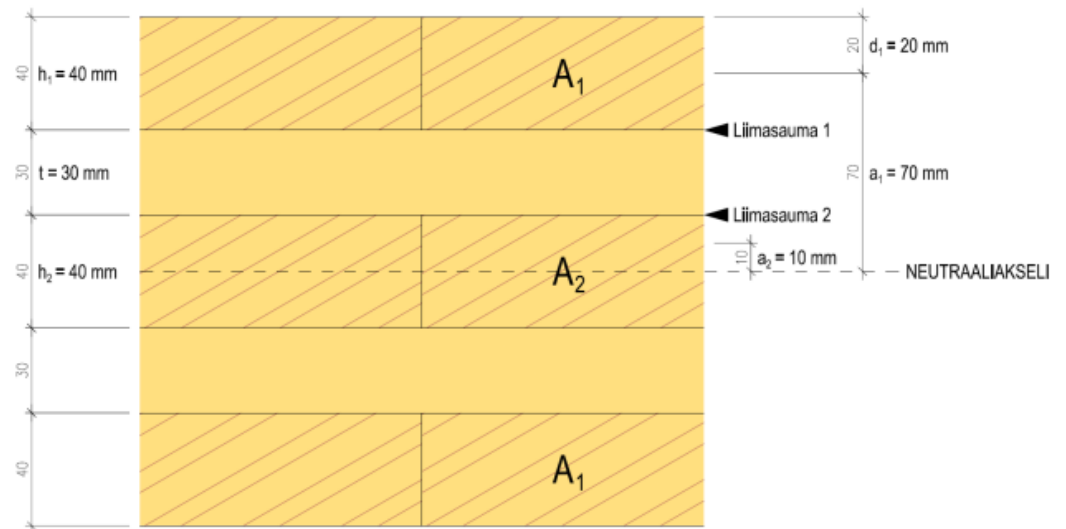
$$- s_i / K_i = d / (G_{R,mean} \cdot b) \quad (10)$$

missä  $d$  = poikittaislamellin paksuus

$G_{R,mean}$  = tasoleikkauksen liukumoduuli,  $G_{R,mean} = 65 \text{ N/mm}^2$

$b$  = poikittaiskerroksen leveys (laatan leveys)

(CrossLam Kuhmo CLT massiivipuulevy, 2019).



Kuvio 5. CLT poikkileikkaus (Välipohjan kestävyys 2015)

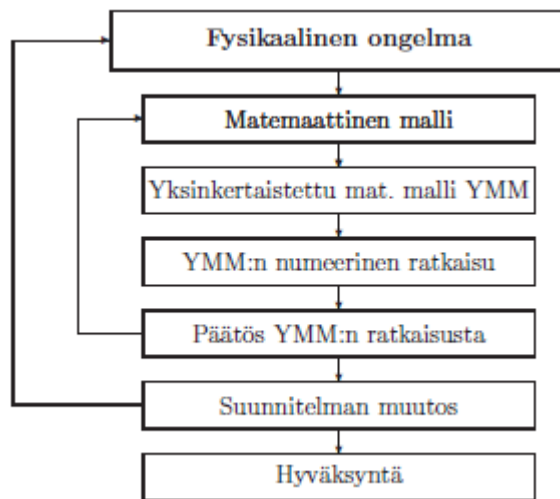
Laskentamenetelmän ideana on korvata joustavasti kootuissa palkeissa palkin eri osien välinen liitosjäykkyys CLT-rakenteen poikittaisten lamellien tasoleikkauksen jäykkyydellä. Käytettäessä joustavasti liitettyjen palkkien teoriaa täytyy poikkileikkauksarvot selvittää käytetyn CLT-valmistajan suunnitteluohjeen mukaisesti. Esimerkiksi mahdollisuus huomioida vääntöjäykkyys laskelmissa edellyttää, että valmistaja ohjeistaa ja hyväksyy vääntöjäykkyyden laskemisen. Näin ei kaikkien valmistajien kohdalla ole.

## 4 Elementtimenetelmä

Teknillisissä tieteissä törmätään usein tilanteeseen, jossa täytyy muodostaa matemaattinen ratkaisumalli fysikaaliseen ongelmaan. Muodostetun matemaattisen ongelman ratkaisu kuvaa sitten haluttua ja mallinnettua todellista materiaalin tai rakenteen käyttäytymistä mallinnetussa tilanteessa. Tällaisessa ongelmassa päästään yleensä sitä tarkempaan tulokseen, mitä enemmän muuttujia matemaattisessa mallissa on. Muuttujilla voidaan ottaa asioita huomioon laskennallisesti. (Kouhia & Tuomala 2009, 2.)

Insinööritieteissä päästään harvoin riittävään tarkkuuteen käyttämättä differentiaaliyhtälöitä eli useita muuttujia sisältäviä yhtälöitä. Yhtälöillä voidaan ratkaista ongelmia tarkasti eli analyttisesti. Kuitenkin suuria määriä muuttujia sisältävien yhtälöiden ratkaisu käy hyvin hankalaksi analyttisiä menetelmiä käyttäen. (Kouhia & Tuomala 2009, 2.)

Useimmissa insinöörin kohtaamissa ongelmissa tarvitaankin yhtälöryhmiä. Matemaattisia ongelmia voidaan mallintaa parhaiten yhtälöryhmien avulla. Pienen yhtälöryhmän ratkaisu symbolisesti eli tarkasti onnistuu usein käsin laskemalla. Kuitenkin monimutkaisia matemaattisia malleja kuvaavien yhtälöryhmien yhtälöiden määrä voi olla esimerkiksi tuhansia kolmannen asteen yhtälöitä. Tällaisia yhtälöryhmiä varten on kehitetty numeerisia eli likimääräisen vastauksen antavia menetelmiä. Numeeriset menetelmät perustuvat erilaisiin iteroiviin prosesseihin eli algoritmeihin, joita toistetaan, kunnes vastaus on riittävän tarkka. Yhtälöryhmien ratkaisuun on kehitetty useita algoritmeja, kuten Gauss-Jordanin menetelmä. Usein päädytäänkin muodostamaan matemaattinen malli yksinkertaistettuna ja ratkaisemaan se numeerisesti. (Kouhia & Tuomala 2009, 2.)



Kuvio 6. Fysikaalisen ongelmanratkaisun periaate (Kouhia & Tuomaala, 2009, 2.)

Rakenteiden mekaniikassa laskentamenetelmät voidaan jakaa kahteen ryhmään. Analyttiset menetelmät perustuvat suoraan differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun joko numeerisen integroinnin tai differenssimenetelmän avulla. Toinen tapa ratkaista mekaniikan ongelmia on numeerinen eli likimääräinen menetelmä. Elementtimenetelmä on numeerinen menetelmä. Elementtimenetelmällä voidaan approksimoida monia eri matemaattisia ongelmia. (Moaveni 2015, 26.) Numeeristen menetelmien etuna on niiden mahdollisuus suurten yhtälöryhmien ratkaisuun tietokoneavusteisesti. (Salmi & Kuula 2017, 318.)



#### 4.1 Siirtymämenetelmä ja staattisen solmutasapainon ratkaisu

Elementtimenetelmän perusajatus on rakenteen jakaminen pieniin osa-alueisiin eli elementteihin. Elementtien määrittelyssä on kolme vaihetta. (Moaveni 2015, 25.)

1. Geometrian määrittely
2. Interpolointifunktioiden määrittely
3. Vapausasteiden määrittely

Käytettäessä siirtymämenetelmää interpolointifunktioiksi määritetään rakenteen geometriaa parhaiten kuvaavat siirtymien kanta- eli muotofunktiot. Muotofunktiona käytetään rakenneteknistä siirtymämenetelmää käytettäessä rakenteen siirtymää il-  
maisevaa lujuusopin kaavaa. (Kouhia & Tuomaala 2009, 44.)

Elementtimenetelmällä voidaan ratkaista globaalisolmujen tasapainoyhtälö. Tasapai-  
noyhtälö on yleensä staattisesti määräämätön ja solmutasapainon ratkaisemiseksi  
tukireaktiot muutetaan ulkoisiksi voimiksi. Siirtymämenetelmässä tasapaino ratkais-  
taan käyttämällä ensin tunnettuina siirtyminä 0, eli tuettuja vapausasteita vastaavat  
rivit ja sarakkeet pyyhitään globaalista jäykkyyismatriisista pois laskettaessa kuormi-  
tuksen aiheuttamia siirtymiä. (Moaveni 2015, 33) Vastaavasti laskettaessa tukireakti-  
oita saatujen siirtymien avulla käytetään tunnettuja siirtymiä ratkaisemaan tunte-  
mattomat tukireaktiot. Tukireaktioita laskettaessa otetaan siis tuettujen vapausastei-  
den rivit ja sarakkeet mukaan laskentaan. (Salmi & Kuula 2017, 328.) (Moaveni 2015,  
39.)

Siirtymämenetelmässä ratkaistaan lineaarisella yhtälöryhmällä staattinen tasapaino-  
tila, jossa:

$$K^{-1} * \{F\} = \{u\} \quad (11)$$

$K$  = Jäykkyys N/mm (matriisi)

$\{F\}$  = Ulkoinen voima N (vektori)

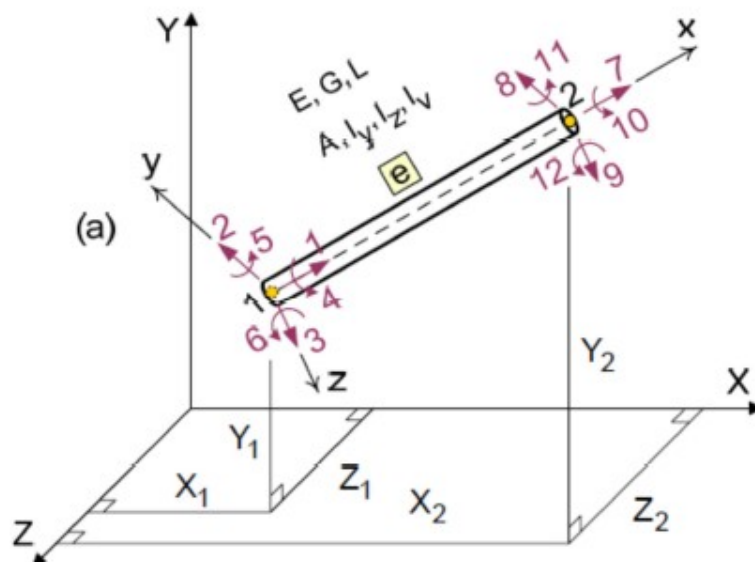
$\{u\}$  = Siirtymä mm (vektori)

Yhtälöllä voidaan siis ratkaista siirtymät ja siirtymien avulla voidaan laskea sisäiset rasitukset sekä tukireaktiot (Moaveni 2015, 161-163). Yhtälön ratkaisu vaatii käänteismatriisin laskemista tai muuta lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisuun soveltuvaa algoritmia.

Erilaisille rakenteille on johdettavissa erilaisia elementtejä. Elementtien vapausasteilla kuvataan siirtymämenetelmässä elementin mahdollista siirtymää. Vapausasteilla tarkoitetaan määritettyä siirtymää tai kiertymää elementin määrättyssä kohdassa. Nämä ovat palkkielementeillä käytännössä aina lujuusopin statiikan kaavoilla laskettavissa olevat siirtymät ja kiertymät sauvan päissä. Rakenteita voidaan laskea 1-, 2- tai 3 ulotteisina.

## 4.2 Avaruuspalkki

Tässä työssä käytetään ainoastaan avaruuspalkkielementtiä ja siihen pohjautuvia elementtejä. Palkkielementillä voidaan kuvata kappaleen aksiaalinen ja lateraalinen siirtymä sekä rotaatio kolmiulotteisena. Tällaisesta elementistä käytetään nimitystä avaruuspalkki. (Salmi & Kuula 2017, 369).



Kuvio 7. Avaruussauvan vapausasteet (Palkkielementti, 2013.)

Kuviossa 7 esitetyt vapausasteet 1-6 toistuvat palkin molemmissa päissä sijaitsevilla laskentasolmuissa. Kuviossa 7 kuvatut vapausasteet ovat paikallisen koordinaatiston mukaisia ja vapausasteet ovat seuraavat:

1 = solmun 1 siirtymä x-akselin suunnassa

2 = solmun 1 siirtymä y-akselin suunnassa

3 = solmun 1 siirtymä z-akselin suunnassa

4 = solmun 1 kiertymä x-akselin ympäri

5 = solmun 1 kiertymä y-akselin ympäri

6 = solmun 1 kiertymä z-akselin ympäri

#### 4.3 Avaruuspalkin jäykkyys- ja massamatriisi

Jäykkyysmatriisit kasataan vapausasteittain. Jokaiselle vapausasteelle merkitään symmetrisesti oma rivi ja sarake. Soluihin syötetään vapausasteiden toisiinsa vaikuttavat jäykkyydet. (Salmi & Kuula 2017, 324-328.) Jäykkyydet johdetaan statiikan siirtymiä kuvaavista kaavoista. Jäykkyys on joustavuuden vastaluku. Joustokertoimet ilmoittavat yksikkösiirtymän aiheuttamiseksi tarvittavan voiman ja joustavuuden yksikkö onkin N/m. (Pennala 1999, 15.)

Käyttämällä sijoittelusummausmenetelmää eli lisäämällä nollasoluja oikeisiin väleihin saadaan globaaliin vapausastejärjestelmään sopivat jäykkyysmatriisit. Vapausasteet kannattaa numeroida globaalissa järjestelmässä eli jokaiselle laskentasolmulle annetaan vapausasteet ongelmassa käytettävän 1-, 2- tai 3-ulotteisen globaalin koordinaatiston mukaan. (Salmi & Kuula 2017, 328.)

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\
 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}$$

Kuvio 8. Avaruuspalkin jäykkyyismatriisi (Palkkielementti, 2013.)

Kun jäykkyyismatriisista poistetaan tiettyä vapausastetta kuvaava rivi ja sarake, huomataan, että jäljelle jäävät jäykkyydet kuvaavat juuri sellaista tilannetta, jossa kyseinen poistettu vapausaste toimii tukireaktiona palkille.

Värähtelyn analysoinnissa rakenteen massalla on merkittävä rooli. Massan merkitystä voidaan havainnollistaa yhden vapausasteen värähtelijän ominaistaajuuden avulla. Yhden vapausasteen värähtelijän ominaistaajuus saadaan lausekkeella:

$$w = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (12)$$

Jossa:

$w$  = ominaiskulmataajuus *rad/s*

$K$  = jousivakio *N/m*

$M$  = massa *kg*

(Salonen 1999, 110.)

Ominaisuuteen vaikuttaa siis kaksi muuttujaa: Jousen jäykkyys ja kappaleen massa. Rakenteiden mekaniikassa vastaavat muuttujat voidaan ilmaista matriisien avulla, jolloin jousivakio on globaali jäykkyyismatriisi ja massa on globaali massamatriisi. (Moaveni 2015, 645; Inman 2019, 284.)

$$\mathbf{m} = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Kuvio 9. Tasopalkin massamatriisi (Palkkielementti, 2013.)

Massamatriisi muodostetaan samoilla periaatteilla ja vapausasteilla kuin jäykkyyismatriisi. Molempien muodostaminen perustuu samoihin muotofunktioihin käytettäessä konsistenttia eli yhteensopivaa massamatriisia. (Pennala 1999, 295-296.) Kuviossa 9 esitetty tasopalkin massamatriisi voidaan helposti laajentaa avaruussauvan massamatriisiksi lisäämällä kolmatta ulottuvuutta vastaavat rivit ja sarakkeet. Tässä työssä käytetään ainoastaan konsistenttia massamatriisia.

#### 4.4 Solmumittausjärjestelmä

Solmumittausjärjestelmällä tarkoitetaan mittausjärjestelmää, jossa jokainen elementin vapausaste voidaan määrittää toistensa suhteen samassa koordinaatistossa eli globaalissa koordinaatistossa. Järjestelmä mittaa elementin sijainnin ja suuntavektoreiden perusteella elementin jäykkyydet ja massat globaalin koordinaatiston mukaisesti. Tämä antaa mahdollisuuden laskea globaalissa koordinaatistossa määriteltyjen kuormien aiheuttamat siirtymät sekä analysoida värähtelyä moniulotteisesti. (Salmi & Kuula 2017, 371.)

Palkkielementin käyttäytyminen on määritetty jäykkyyismatriisiin paikallisessa koordinaatistossa vapausasteittain. Suuntakosinien avulla voidaan muodostaa sellainen ortogonaalinen matriisi, jolla voidaan suorittaa koordinaatiston muunnos avaruuspalkin

jäykkyys- ja massamatriiseille elementin solmukoordinaattien ja kiertokulman perusteella. (Salmi & Kuula 2017, 373.)

Kiertomatriisin  $T$  alkiot täytyy muodostaa valittujen vapausasteiden ja koordinaatiston mukaan. Opinnäytetyössä kehitetyn ohjelman pääasiassa laattojen laskemiseen käyttämän arinaelementin kiertomatriisin alkiot ovat:

$$s = (x_2 - x_1) / L \quad (12)$$

$$c = (y_2 - y_1) / L \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

(Salmi & Kuula 2017, 375.)

Koordinaattien muunnosyhtälöksi muodostuu:

$$T^T * K_e * T = K'_e \quad (14)$$

(Moaveni, S 2015. 257.)

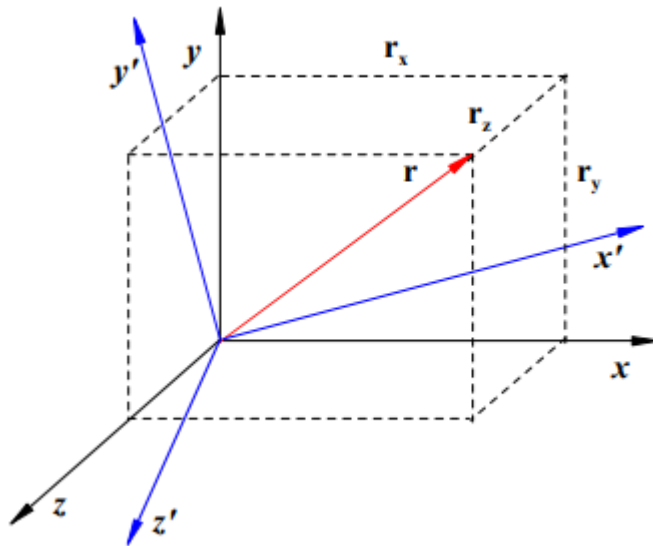
Jossa:

$T^T$  = Koordinaatiston muunnosmatriisin transpoosi

$T$  = Koordinaatiston muunnosmatriisi

$K'_e$  = Elementin jäykkyysmatriisi globaalissa koordinaatistossa

$K_e$  = Elementin jäykkyysmatriisi paikallisessa koordinaatistossa



Kuvio 10. Paikallinen ja globaali koordinaatisto (Palkkielementti, 2013.)

#### 4.5 Elementtien yhdistäminen globaaliksi rakenteeksi

Kun elementtien paikallisessa koordinaatistossa muodostetut jäykkyyss- ja massamatriisit on onnistuneesti käännetty muunnosyhtälöllä (kaava 14) globaaliin koordinaatistoon, täytyy globaaleja vapausasteita vastaavat jäykkyydet ja massat summata jokaisessa laskentasoelmussa. Tämä tarkoittaa, että samaan laskentasoelmuun liittyvien elementtien kyseistä päätä vastaavat jäykkyyss- ja massamatriisin alkiot summataan globaalin jäykkyyss- ja massamatriisin kyseisen laskentasoelmun kyseisiä vapausasteita kuvaaviin soluihin. (Moaveni 2015, 31.) (Salmi & Kuula 2017, 328.)

#### 4.6 Värähtelyn analysoiminen elementtimenetelmällä

Dynaamisen liikeyhtälön muodostaminen onnistuu myös elementtimenetelmällä. Yhtälö sisältää liikeyhtälön vaatimat parametrit matriisi- tai vektorimuodossa. Tässä työssä keskitytään ratkaisemaan vapaan vaimentamattoman värähtelyn ominaisuuksia ja ominaismuodot rakenteelle. (Pennala 1999, 291.)

Vapaan vaimentamattoman värähtelyn liikeyhtälö saadaan supistettua muotoon:

$$[k'] - w^2[m']\{X\} = \{0\} \quad (15)$$

Jossa:

$[k']$  = rakenteen jäykkyyssmatriisi globaalissa koordinaatistossa

$w$  = rakenteen ominaiskulmataajuus

$[m']$  = rakenteen konsistentti massamatriisi globaalissa koordinaatistossa

$\{X\}$  = ominaistajuuden mukainen ominaismuotovektori

Yhtälö on ratkaistavissa ominaisarvo-ongelmana. Ominaisarvo-ongelman ratkaisemiseksi on mahdollista käyttää useita erilaisia numeerisia menetelmiä, esimerkiksi aliavaruusiteraatio. (Pennala 1999, 291).

Yhtälö voidaan johtaa muotoon:

$$w^2 * \{X\} = (m'^{-1} * k') * \{X\} \quad (16)$$

(De Silva 2007, 251; Inman 2019, 286).

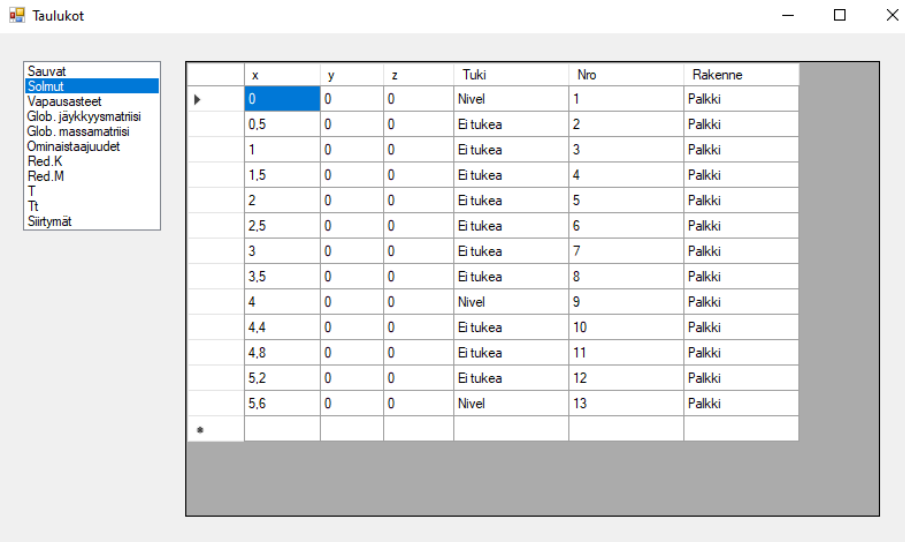
Yhtälön ratkaisuna saadaan ominaisarvot ja ominaisvektorit jäykkyyssmatriisin käänteismatriisin ja massamatriisin tulona syntyvästä matriisista. Ominaisarvot ovat rakenteen ominaistajuudet ja ominaisvektorit kyseisten ominaistajuuksien mukaisien värähtelymuotojen yleistetyt koordinaatit. (Moaveni 2015, 120.)



## 5 Tulokset

### 5.1 Laskentaprosessin eteneminen kehitetyssä ohjelmassa

Opinnäytetyönä kehitetty ohjelma kerää käyttäjän lisäämät laskentasolmut sekä sauvat omiin taulukoihin. Kukin solmu sisältää tiedon koordinaateista ja vapausasteista. Kukin sauva sisältää tiedon sauvan päihin liittyvistä solmuista sekä sauvan poikkileikkauksesta. Lisäksi solmujen taulukoimisen yhteydessä ohjelma kerää jokaisen vapausasteen tiedot omaan taulukkoon. Kuviossa 11 on esitettyä esimerkki solmutaulukosta.



	x	y	z	Tuki	Nro	Rakenne
▶	0	0	0	Nivel	1	Palkki
	0,5	0	0	Ei tukea	2	Palkki
	1	0	0	Ei tukea	3	Palkki
	1,5	0	0	Ei tukea	4	Palkki
	2	0	0	Ei tukea	5	Palkki
	2,5	0	0	Ei tukea	6	Palkki
	3	0	0	Ei tukea	7	Palkki
	3,5	0	0	Ei tukea	8	Palkki
	4	0	0	Nivel	9	Palkki
	4,4	0	0	Ei tukea	10	Palkki
	4,8	0	0	Ei tukea	11	Palkki
	5,2	0	0	Ei tukea	12	Palkki
	5,6	0	0	Nivel	13	Palkki
*						

Kuvio 11. Esimerkki ohjelman solmutaulukosta.

Vapausastetaulukko sisältää järjestysnumeron, vapausasteen kuvauksen sekä tiedon, onko vapausaste tuettu globaalissa rakennemallissa vai ei. Ohjelmoinnin kannalta on viisasta sijoittaa taulukkoon myös indeksit, joihin vapausasteeseen liittyvät jäykkyyskertoimet syötetään globaalissa jäykkyysmatriisissa. Taulukoiden avulla ohjelma muodostaa rakenteen globaalin jäykkyysmatriisin  $K$  sekä globaalin massamatriisin  $M$ . Kuviossa 12 on esitettyä palkin vapausasteita.

Taulukot

Sauvat	Vapausasten nro	Tyyppi	Vap	Solmu	Paikallinen nro
Solmut	5	Vapaa nivel	Rot y	0	7
Vapausasteet	7	Ei tukea	sz	1	6
Glob. jäykkymatriisi	11	Ei tukea	Rot y	1	10
Glob. massamatriisi	13	Ei tukea	sz	2	5
Ominaisaajuudet	17	Ei tukea	Rot y	2	9
Red.K	19	Ei tukea	sz	3	5
Red.M	23	Ei tukea	Rot y	3	9
T	25	Ei tukea	sz	4	5
Tt	29	Ei tukea	Rot y	4	9
Siirtymät	31	Ei tukea	sz	5	5
	35	Ei tukea	Rot y	5	9
	37	Ei tukea	sz	6	5
	41	Ei tukea	Rot y	6	9
	43	Ei tukea	sz	7	5
	47	Ei tukea	Rot y	7	9
	53	Vapaa nivel	Rot y	8	7

Kuvio 12. Esimerkki vapausasteluettelosta.

Käyttäjä voi syöttää jokaiseen laskentaselmuun ulkoisen voiman. Ulkoiset rakenteesseen kohdistuvat voimat taulukoidaan omaan taulukkoonsa ja jokainen voima sisältää tiedon voiman suunnasta ja suuruudesta. Ohjelma muodostaa taulukon perusteella vektorin  $\{F\}$ .

Yhtälöryhmällä täytyy olla riittävä määrä reunaehtoja, jotta se voidaan ratkaista: tässä tapauksessa rakennemallin tukireaktioita. Tukireaktiot huomioidaan laskennassa pyyhkimällä globaaleista jäykkyys- ja massamatriiseista pois kyseistä globaalia vapausastetta vastaavat rivit ja sarakkeet. Tämä on helppo ohjelmoida, kun globaalit vapausasteet on ensin taulukoitu.

Matriisilaskennassa yhtälöryhmä voidaan ratkaista usealla eri tavalla. Tässä ohjelmassa käytetään käänteismatriisia. Siirtymät ratkaistaan kertomalla  $K'^{-1}$  ulkoisten voimien vektorilla  $\{F\}$ . Vastauksena saatu vektori  $\{u\}$  sisältää siirtymät vapausasteittain. Vektori taulukoidaan käyttäjän nähtäväksi, kuten kuviossa 13.

Taulukot

Sauvat	Siirtymä	Dof
Solmut	0,584416646991...	Rot y
Vapausasteet	0,285275139894...	sz
Glob. jäykkymatriisi	0,542817545382...	Rot y
Glob. massamatriisi	0,528951178179...	sz
Ominaistaajuudet	0,418020240556...	Rot y
Red.K	0,689429013247...	sz
Red.M	0,210024732512...	Rot y
T	0,725109543489...	sz
Tt	-0,08116897874...	Rot y
Siirtymät	0,613333095670...	sz
	-0,34192432297...	Rot y
	0,407197710056...	sz
	-0,45860472993...	Rot y
	0,178740855286...	sz
	-0,43121019960...	Rot y
	-0,25974073199...	Rot y
	-0,06818194214...	sz

Kuvio 13. Esimerkki siirtymätaulukosta.

Kehitetty ohjelma laskee ominaistaajuudet ja ominaismuotovektorit rakenteen liikeyhtälön matriisista eli kaavan 17 matriisista A:

$$K'^{-1} * M' = A \quad (17)$$

Tällöin lasketut ominaisarvot ovat ominaiskulmataajuuden toisen kertaluvun vastalukuja. Luvuista saadaan ominaistaajuus kaavalla:

$$\omega = \frac{\sqrt{(1/w)}}{(2*\pi)} \quad (18)$$

Ominaistaajuudet ohjelma taulukoi omaan taulukkoonsa, jonka käyttäjä löytää väli-  
lehdeltä taulukot.

Kiihtyvyys vapausasteelle käyttäen askelherätettä voidaan laskea käytettäessä elementtimenetelmää kaavalla:

$$a_n = \frac{R \cdot F_n}{2M_n \cdot \zeta} \cdot \Phi_n^2 \quad (19)$$

(Talja, Toratti & Järvinen 2002, 26)

Jossa:

$R$  = Kiihtyvyyden pienennyskerroin 0,7

$F_n$  = Kävelyherätteen taajuuskomponenttia vastaava herätteen suuruus

$M_n$  = Värähtelyssä mukana oleva tehollinen massa

$\varphi_n$  = Herätteen suuntainen ominaismuodon komponentti tarkasteltavassa vapausasteessa

$\zeta$  = Käytettävä vaimennussuhde

Kävelyherätteen taajuuskomponentit voidaan laskea kaavalla:

$$F_n = P \cdot 0,83 \cdot e^{-0,35f_n} \quad (20)$$

(Talja, Toratti & Järvinen 2002, 26)

Kiihtyvyysskriteerien laskeminen oli opinnäytetyössä toissijainen tavoite. Kiihtyvyysskriteerien laskenta todettiin kehitysvaiheessa epäluotettavaksi ja ohjelman kehitys kiihtyvyysskriteerien ratkaisuun keskeytettiin.

Taulukot

Sauvat				
Solmut				
Vapausasteet				
Glob. jäykkyyssmatrissi				
Glob. massamatrissi				
Ominaisaajuudet				
Red.K				
Red.M				
T				
Tt				
Siirtymät				

	Ominaisaajuus	Tehollinen massa	Kävelyheräte	Max.kiihtyvyys
►	19,19665647625...	0	0,622485024157...	=
	63,20765562429...	0	0,622498618637...	=
	110,4962930207...	0	0,622499547985...	=
	151,1502227824...	0	0,622499758437...	=
	248,3563696016...	0	0,622499910525...	=
	366,8473237440...	0	0,622499958991...	=
	430,7495570504...	0	0,622499970256...	=
	562,1343109322...	0	0,622499982535...	=
	751,9307365056...	0	0,622499990239...	=
	902,9211591839...	0	0,622499993230...	=
	1080,7943890745	0	0,622499995275...	=
	1338,277703129...	0	0,622499996918...	=
	1633,464999492...	0	0,622499997931...	=
	1805,778270260...	0	0,622499998307...	=
	2164,0562092845	0	0,622499998821...	=
	2588,822376491...	0	0,622499999176...	=

Kuvio 14. Esimerkki tulostaulukosta.

## 5.2 Vertailulaskelmat

Vertailulaskelmat toteutettiin kansallisessa liitteessä annetuilla laskentakaavoilla. Näistä kaavoista muodostettiin laskentataulukko Excel-tilukkolaskentaohjelmaan. Rakennemalleja muodostettiin palkeille nivelellisinä ja ulokkeina. Varsinaista laskentakaavaa ei jäykästi tuetulle eikä jatkuvalle palkille tai laatalle mitoitusohjeissa ole, vaan vastaus täytyy laskea käyttäen soveltuvaa työkalua. Työkaluina vertailulaskelmissa käytettiin RFEM-laskentaohjelmaa ja sen lisäosaa DynamPro.

Erilaisen rakennemallin palkkeja laskettiin eri mittaisina 3 kpl ja jokaista eri mittaista palkkia kohden laskenta toteutettiin kahdella eri solmujaolla. Tulokset palkeille löytyvät liitteestä 1.

Erilaisia laattoja laskettiin suorakulmaisina eri dimensioilla siten, että dimensioita muutettiin eri suhteilla. Dimensioita valittiin 6 erilaista ja laskenta suoritettiin samoilla materiaali sekä geometria-arvoilla. Tulokset laatoille löytyvät liitteestä 2. Johdopäätökset ja tulosten yhteenvedo löytyy kohdasta 6.2 ja 6.3.

### 5.3 Ohjelman luotettavuus ja käytettävyys

Ohjelman toimivuus voidaan todentaa vain luotettavin vertailulaskelmin, ja pitkällisen käyttökokemuksen myötä varmuus kasvaa. Ohjelman periaatteellinen toimivuus voidaan kuitenkin todentaa kuvaamalla ohjelmalla yhden globaalin z-suuntaisen vapausasteen värähtelyä (Moaveni 2015, 645; Inman 2019, 284).

Rakennemalliksi voidaan helposti muodostaa neljän momenttijäykästi tuetun sauvan muodostama tasokehä. Tällöin yhdellä solmulla on kolme vapausastetta, joten jäykkyy- ja massamatriisi on helppo tarkistaa käsin laskennalla. Lisäksi tilanteeseen voidaan soveltaa yhden vapausasteen värähtelijän ominaistaajuuden kaavaa ja laskea z-suuntaisen siirtymän ominaistaajuus käsin. Tällöin ohjelman tulee antaa sama vastaus ominaistaajuudelle ja näin kokeiltaessa ohjelma toimikin kuten luvussa 5.4 esittää.

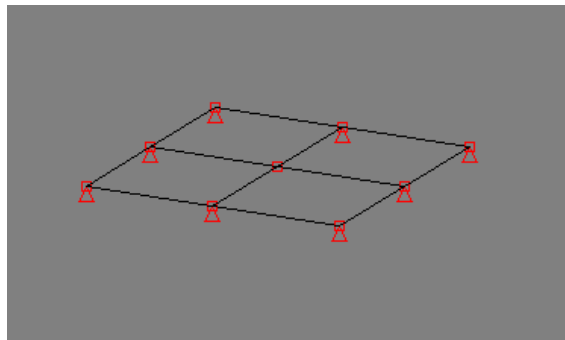
Ohjelman helppokäyttöisyys riippuu lähes täysin rakennemallista. Jos rakenne voidaan kuvata riittävällä tasolla ohjelmaan sisällytetyllä rakennemallilla, on laskentamallin muodostaminen kohtalaisen helppoa. Mikäli näin ei ole, voidaan erilaisia ohjelmassa olevia rakennemalleja, kuten palkkeja yhdistellä manuaalisesti sauva kerrallaan laskentasolmujen välille. Tämä on kuitenkin työlästä ja aikaa vievää. Tämä voi tulla kyseeseen esimerkiksi, jos halutaan ottaa tukena toimivan palkin joustovaikutus huomioon. Tällöin voidaan muodostaa reunoiltaan tukematon laatta ja lisätä halutun mittainen ja lujuinen palkki haluttujen laskentasolmujen välille. Tällöin laskenta huomioi palkin sen laskennallisen jäykkyyden mukaan.

Jatkuvan palkin muodostaminen tehdään yksinkertaisesti lisäämällä tukireaktiot. Ohjelma muodostaa aina edellisen lisätyn tuen ja seuraavan lisättävän tuen välille palkkielementit ja valitun määrän laskentasolmuja eli interpolointipisteitä tasajaolla. Aukkoihin voidaan määrittää omat poikkileikkaukset ja massa. Poikkileikkaus on mahdollista vaihtaa myös keskellä aukkoa käyttämällä valintaa ”Ei tukea”. Tällöin ohjelma lisää valittuun koordinaattiin laskentasolmun ja aukko jatkuu uudestaan valittavalla poikkileikkauksella ja massalla seuraavaan lisättävään tukeen saakka valitulla elementtijaolla.

Suorakulmaisen laatan rakennemallin muodostaminen onnistuu helposti. Laatan muodostamiseen on oma ikkunansa, johon tarvittavat parametrit lisätään. Koordinaatiston suuntiin x ja y voidaan kullekin suunnalle määrittää omat poikkileikkauksensa. Tämä mahdollistaa ortotrooppisen rakenteen eli esimerkiksi CLT-välipohjan laskennan.

#### 5.4 Ohjelman tarkastaminen pienellä rakennemallilla

Ohjelman toimintaa voidaan tarkastaa periaatteellisella tasolla myös ilman varsinaisen ohjelmakoodin tarkastusta. Toiminnan oikeellisuutta voidaan varmentaa esimerkiksi vertaamalla ohjelman tuottamia matriiseja käsin laskettuihin matriiseihin käyttäessä pieniä rakennemalleja. Näin on myös tehty ja tulokset ovat olleet oikein. Tässä kappaleessa tarkastetaan z-suuntaiseksi heiluriksi yksinkertaistettu rakenne.



Kuvio 15. Yksinkertainen rakennemalli tarkastusta varten.

Kuviossa 11 esitetty rakennemalli sisältää 3 vapausastetta. Nämä voidaan lukea vapausastetaulukosta, joka on esitetty kuviossa 16.

Sauvat	Vapausasten	Tyyppi	Vap	Solmu
Solmut	nro			
Vapausasteet	25	Ei tukea	sz	4
Glob. jäykkymatriisi	27	Ei tukea	Rot x	4
Glob. massamatriisi	29	Ei tukea	Rot y	4
Ominaisaajuudet	*			
Red.K				
Red.M				
T				
Tt				
Siirtymät				

Kuvio 16. Vapausastetaulukko tarkastettavalle rakenteelle.

Lisäksi solmu- ja sauvataulukoista voidaan tarkastella rakennemallin muodostumista. Ohjelmassa saadaan näkyviin myös solmun numero ja koordinaatit osoittamalla solmua kursorilla. Tämä helpottaa mallin hahmottamista ja tarkastamista.

	n1	n2	Prof	E	A	ly	lz	G	lv	L
►	1	2	Puuinfo es...	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1	1	1
	2	3	Puuinfo es...	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1	1	1
	4	5	Puuinfo es...	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1	1	1
	5	6	Puuinfo es...	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1	1	1
	7	8	Puuinfo es...	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1	1	1
	8	9	Puuinfo es...	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1	1	1
	1	4	Puuinfo es...	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1	1	1
	4	7	Puuinfo es...	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1	1	1
	2	5	Puuinfo es...	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1	1	1
	5	8	Puuinfo es...	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1	1	1
	3	6	Puuinfo es...	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1	1	1
	6	9	Puuinfo es...	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1	1	1

	x	y	z	Tuki	Nro	Rakenne
►	0	0	0	Momenttijäykä	1	Laatta
	0	1	0	Momenttijäykä	2	Laatta
	0	2	0	Momenttijäykä	3	Laatta
	1	0	0	Momenttijäykä	4	Laatta
	1	1	0	Ei tukea	5	Laatta
	1	2	0	Momenttijäykä	6	Laatta
	2	0	0	Momenttijäykä	7	Laatta
	2	1	0	Momenttijäykä	8	Laatta
	2	2	0	Momenttijäykä	9	Laatta
*						

Kuvio 17. Solmu- ja sauvataulukko tarkastusta varten.

Muodostettu globaali jäykkyys- ja massamatriisi redusoituna kiinnitetyillä vapausasteilla voidaan lukea ohjelmasta. Esimerkkirakenteen jäykkyys- ja massamatriisit löytyvät kuviosta 18.



Taulukot

Sauvat		0	1	2
Solmut				
Vapausasteet	►	3,523809523809...	0	0
Glob. jäykkymatriisi				
Glob. massamatriisi		0	0,047619047619...	0
Ominaisaajuudet		0	0	0,095238095238...
Red.K				
Red.M	*			

Taulukot

Sauvat		0	1	2
Solmut				
Vapausasteet	►	52799904	0	0
Glob. jäykkymatriisi				
Glob. massamatriisi		0	8799986	0
Ominaisaajuudet		0	0	8799986
Red.K				
Red.M	*			
T				
Tt				
Siirtymät				

Kuvio 18. Globaali jäykkymatriisi ja massamatriisi.

Koska rakenne on yksinkertaistettu yhden z-akselin suuntaisen siirtymän sisältävän vapausasteen rakenteeksi, voidaan ominaisaajuus tarkastaa nyt käyttäen yhden vapausasteen värähtelijän ominaisaajuuden laskukaavaa.

Jäykkyyserroin toisesta päästään kiinnitetylle palkille:

$$\left[ \frac{12 * E * I}{L^3} \right] = k \quad (21)$$

eli tässä tapauksessa:

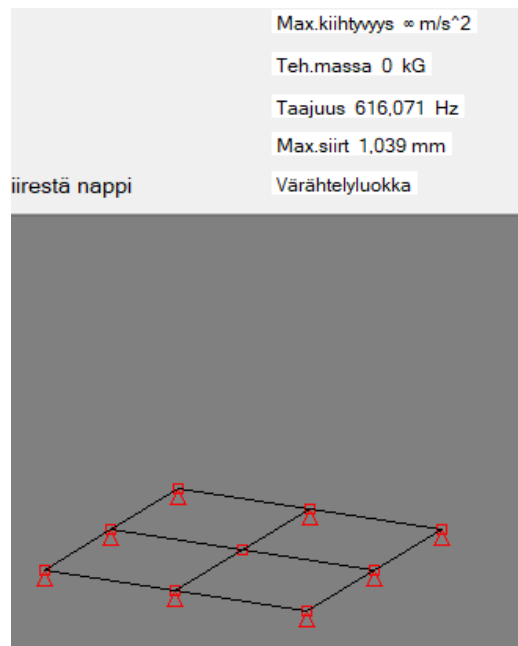
$$\frac{4 * 12 * 13800000000 * 0,00007971}{1^3} = \frac{52799904N}{m}$$

Massaksi kyseiselle vapausasteelle muodostuu 3,52 kg kun koko rakenteen massa on 20 kg.

Ominaiskulmataajuus saadaan z-suuntaan käyttäen kaavaa 12:

$$\omega = \sqrt{\frac{52799904 \text{ N/m}}{3,52 \text{ kg}}} = 3872 \text{ rad/s} = 616 \text{ Hz}$$

Joka on myös ohjelman tuottama vastaus kuten kuviosta 19 voidaan lukea.



Kuvio 19. Ohjelman vastaus esimerkkirakenteelle.

Näin voidaan tehdä johtopäätökset ohjelman oikeasta toiminnasta. Vertailulaskelmien avulla on varmistettu ohjelman toiminnasta myös suuremmalla rakennemallilla ja samalla on tarkastettu rakennemallin luomiseen tarkoitettujen apuohjelmien toiminta.

## 5.5 Tulosten tarkkuus

Vertailulaskelmissa tulokset vaihtelevat riippuen rakennemallista. Eräs tuloksiin vaikuttava seikka on, että ohjelmaan oli syötetty hyvin pieni vääntökapasiteetti laskennan vertaamiseksi kansallisessa liitteessä esitettyihin laskentakaavoihin, jotka eivät huomioi vääntöä ollenkaan.

Nivelellisten palkkien osalta tulokset vastaavat erittäin hyvin käsin laskennalla saatuja arvoja. Solmujen määrä vaikuttaa palkkien osalla hyvin vähän ominaistajuuteen. Suurin syy taipuman virheeseen on solmujen sijainti. Ohjelmassa voidaan syöttää kuorma vain laskentasolmuun. Jos solmu ei sijaitse jännevälän keskellä, luonnollisesti taipuman arvo on eri kuin kaavalla laskettu.

Taulukko 4. Vertailulaskelmien yhteenveto: Palkit

Yhteenveto palkit		Kaava		Ohjelma		Ero Hz %	Ero s %
Pituus	Massa	Hz	s	Hz	s		
3	68	22,198	0,511	22,198	0,503	0,00	1,6
3,8	57	15,112	1,039	15,112	1,027	0,00	1,2
5	45	9,824	2,367	9,824	2,339	0,00	1,2

Laattojen osalta tulokset hieman vaihtelivat. Tulosten vaihtelu RFEM-laskelmiin verrattuna pysyi kohtuullisena. Virhe aiheutuneen suurimmilta osin erilaisista poikkileikkauksen vääntökapasiteetista ja eroista massamatriisissa. Kehitetty ohjelma käyttää konsistenttia massamatriisia ja laskenta RFEM-ohjelmalla suoritettiin käyttäen keskitettyjä massoja. Tämä aiheuttaa hieman virhettä.

Taulukko 5. Vertailulaskelmien yhteenveto: Laatat

	Massa=71kg/m <sup>2</sup>		El=459450	Nm <sup>2</sup>	Erotus	Erotus %
	Kaava	RFEM	Ohjelma			
Kolmelta sivulta nivelellisesti tuettu laatta 4x4m	-	8,323	8,228	Hz	0,095	1,14
Jäykästi tuettu ulokelaatta 3x3m	-	7,368	7,306	Hz	0,062	0,84
Nivel-jäykkä laatta 3x6m	-	8,169	8,556	Hz	0,387	4,52
Nivel-nivel laatta 4x4m	-	8,287	8,536	Hz	0,249	2,92

	Massa=142kg/m <sup>2</sup>		El=2199996	Nm <sup>2</sup>	Erotus	Erotus %
	Kaava	RFEM	Ohjelma			
Neljältä sivulta nivelellinen 4x4m	24,44	-	24,584	Hz	0,144	0,59
Neljältä sivulta nivelellinen 6x3m	29,54	-	33	Hz	3,46	10,48

## 5.6 Ohjelman käyttömahdollisuudet rakennesuunnittelussa

Ohjelman käyttömahdollisuuksista todennäköisin on jatkuvaksi palkiksi yksinkertaistetun korkeataajuuslattian mitoittaminen. Ohjelma ei tällä hetkellä ratkaise murtorajatilan mukaisia rasituksia, joten murtorajatilan mitoitus täytyy tehdä erikseen. Välipohjien osalta kuitenkin juuri värähtelymitoitus on usein mitoittava. Lisäksi palkkien osalta työkalu antaa oivan mahdollisuuden soveltaa Pupax-, Finnwood- tai Excel-ohjelmia jatkuvien välipohjien laskentaan. Ohjelmalla voidaan ratkoa värähtelymitoitus ja murtorajatile muilla yksinkertaisilla ohjelmilla tai vaikkapa jatkuvan palkin laskentaan tarkoitetuilla laskentakaavoilla. Tällöin ei tarvita kaupallisia fem-ohjelmia välipohjan mitoitukseen.

Laattojen osalta ohjelman käyttö rajoittunee ainakin aluksi luonnossuunnitteluun. Tällöin välipohjien lopullista rasitusta ja rakennetta ei vielä tiedetä. Ohjelmalla voidaan saavuttaa helposti valistunut arvio tarkasteltavan välipohjarakenteen soveltuvuuteen ilman erillisiä tarkkoja ja aikaa vaativia fem-analyysyjä kaupallisilla ohjelmilla.

Yksi ohjelman jatkokehityskohteista voisikin olla rasitusten laskeminen ja esittäminen ymmärrettävässä muodossa. Tällöin ohjelman käyttömahdollisuudet kasvaisivat huomattavasti. Toteutuskin olisi ohjelmoinnin osalta melko yksinkertainen. Tämä kuitenkin rajattiin työstä pois, koska aihe olisi muutoin laajentunut huomattavasti ja tutkimuksen tavoitteena oli kehittää työkalu värähtelymitoitukseen.

## 6 Pohdinta

Opinnäytetyön päätavoitteet olivat selkeästi toiminnallisia. Laskentaohjelman kehittäminen ominaistajuuksien laskentaan ristiin kantavalle laatalle ja jatkuvalla palkille olivat päätavoitteena. Laskentaohjelman kehittäminen, ohjelmoinnin sekä elementtimenetelmän opetteleminen olivat hyvinkin haasteellisia aikatauluun nähden. Toissijaisia tavoitteita olivat monimuotoisemmat rakennemallit sekä matalataajuuslattian värähtelykriteerit.

Jo opinnäytetyösuunnitelman tekemisessä haasteen aiheutti oman osaamisen arvioinnin vaikeus. Aiheen oppiminen oli nopeaa ja riski virhearvioon omista kyvyistä suuri. Tämä aiheutti epävarmuutta aiheen rajaukseen sekä tavoitteiden asettamiseen.

Ohjelmointi ja elementtimenetelmän hyödyntäminen onnistuivat opinnäytetyössä tavoitteiden mukaisesti. Ohjelmointia voidaan helposti jatkaa ja kehittää ohjelmaan uusia rakennemalleja. Toissijaisten tavoitteiden osalta tehollisen massan ja kiihtyvyyksien laskeminen jätettiin lopulta ohjelman ensimmäisestä versiosta pois tehollisen massan epävarmuuden vuoksi. Epävarmuus näyttäisi johtuvan käytetyn ulkopuolisen kirjaston automatiikasta, johon ei voida vaikuttaa. Kirjasto laskee oikein, mutta luetteloit tulokset eri tavoin, riippuen valitsemastaan laskentatavasta.

Tuloksena toiminnallisesta kehitystyöstä saatiin toimiva, yleispätevä ja helppokäyttöinen laskentaohjelma korkeataajuuskriteerien laskentaan jatkuville ja ristiin kantaville rakenteille.

Laadullisista tavoitteista vertailulaskelmat ja ohjelman toiminnan osoittaminen olivat tärkeimpiä. Toiminta on osoitettu kohdassa 5.4 periaatteellisella tasolla ja verrattu käsin laskettuja arvoja ohjelman muodostamiin arvoihin. Lisäksi vertailulaskelmin osoitettiin ohjelman soveltuvan suuriinkin rakennemalleihin.

Laadullisen tutkimuksen laatu jäi hieman tavoitellusta. Tässä syynä oli aiheen rajauksen haasteet. Tutkimussuunnitelmassa mainittujen toissijaisten tavoitteiden saavuttamiseksi täytyi aiheeseen perehtyä huomattavan syvällisesti verrattuna päätavoitteeseen. Tutkimussuunnitteluvaiheessa halusin kuitenkin sisällyttää mahdolliset saavutettavissa olevat tulokset eli matalataajuuslattian kriteerit tavoitteisiin, koska mielestäni ne olivat tavoittelemisen arvoiset riskeihin nähden.

Tutkimus olisi saanut olla kattavampi laadulliselta osioltaan. Nyt teoreettinen viitekehys jää hieman suppeaksi tärkeimpien tavoitteiden osalta ja keskittyy turhaan toissijaisiin tavoitteisiin kuten kiihtyvyyksien laskentaan. Toisaalta työssä täytyi huomioida myös kiihtyvyydet koska ne liittyvät olennaisesti mitattavan ja tutkittavan ilmiön syntyn.

Toiminnallisen kehitystyön laatu vastaa ennakko-odotuksia. Ohjelman toimivuus on testattu ja ohjelman toiminta tunnetaan. Jokaiselle ohjelman tekemälle toimenpiteelle on peruste. Kehitystyön laatua voisi parantaa vielä kunnollisilla käyttöohjeilla ja käyttäjää opastavalla ohjelmoinnilla. Esimerkiksi tällä hetkellä ohjelmassa ei ole kaikille toiminnoille virheiden ilmoitustoimintoja vaan käyttäjä saa määrittelemättömän virheen. Virhe voi johtua esimerkiksi väärästä tai puuttuvasta lähtöarvosta, jota käyttäjä ei ole huomannut. Lisäksi laatua voisi parantaa paremmalla ominaisarvoanalyysin suorittavalla ulkoisella kirjastolla tai omalla koodilla tehtävän suorittamiseen. Math.Net Numerics ei suoraan anna mahdollisuutta esimerkiksi yleistettyyn ominaisarvoanalyysiin, jolloin vastaus voitaisiin laskea tarkemmin ja nopeammin.

Kehitetyn ohjelman käytön rajoituksia ovat suuren vääntökapasiteetin omaavat laatarakenteet. Ohjelma käyttää yksinkertaistusta, mikä voi vaikuttaa tuloksiin. Toisaalta puuvälipohjat ovat yleensä vääntökapasiteetiltaan heikkoja. Esimerkiksi CLT-rakenteen mitoituksessa yksinkertaistetulla menetelmällä joustavasti liitettyjen palkkien teoriaa hyödyntäen ei voida ottaa vääntöä huomioon. Valmistajien ohjeet sekä eurokoodi eivät varsinaisesti ohjeista väännön vaikutuksesta.

Lisäksi rajoitteena ohjelman käytölle voidaan todeta vähäinen käyttökokemus. Ohjelmaa on lähdettävä systemaattisesti kokeilemaan muiden menetelmien rinnalla. Käytökertojen kasvaessa varmuus ohjelman oikeasta toiminnasta kasvaa. Vertailulaskelmia on tehty, mutta on mahdollista, että ohjelmassa esiintyy virheitä, joita vertailulaskelmissa ei ole tullut esiin. Niinpä ohjelman antamiin tuloksiin täytyy suhtautua käyttöä aloitettaessa kriittisesti.

Kokonaisuutena työ on tavoitteiden mukainen. Kehitystyön voidaan katsoa olevan sellaista, mitä on toivottu ja suunniteltu. Opinnäytetyötä tehdessäni opin laskemaan värähtelykriteereitä RFEM-ohjelmalla. Tämän oppimisprosessin aikana ymmärsin myös, miksi tämän opinnäytetyön aihe on oiva kehityskohde. Värähtelymitoitus kaupallisella ohjelmalla on erittäin haasteellista asiaan perehtymättömälle. Oli yllättävää, kuinka hankalaa värähtelykriteerien laskenta oli kaupallisilla ohjelmilla.

Ohjelman jatkokehitys olisi luontevaa aloittaa uusien rakennemallien luomisesta. Tällä hetkellä rakennemallit eivät vielä ole riittävän kattavia. Laattojen luomiseen tarvitaan uusia keinoja. Lisäksi mahdollisuus laskea kuormitusten perusteella rasiutukset ja rasiutusten esittäminen riittävällä tasolla olisi suotavaa. Silloin ohjelmaa voitaisiin käyttää välipohjien suunnitteluun kokonaisvaltaisesti.

Tärkeä lisä ohjelmaan olisi CLT-rakenteiden laskemisen automatisointi. Jos ohjelmalla halutaan mitoitaa CLT-lattiarakenne, täytyy ensin laskea teholliset poikkileikkausarvot käsin. Tämän voisi huomioida ohjelmallisesti hyvin yksinkertaisella järjestelyllä mutta järjestely voi aiheuttaa käyttäjille myös haasteita tiettyjen rakennemallien osalta. Päätettiin toistaiseksi jättää poikkileikkausarvojen määrittely kokonaan käyttäjän toimeksi koska se antaa käyttäjälle myös vapauksia. Poikkileikkausarvojen laskennan automatisointi toisaalta vähentäisi virheiden ja työn määrää CLT-rakenteita mitoitettaessa. Mahdollisuus tähän yritetään toteuttaa vielä kirjallisen osuuden jälkeen.

Ohjelma on pyritty ohjelmoimaan siten, että sitä voidaan jatkokehittää. Olio-ohjelmointi antaa mahdollisuuden käyttää jo ohjelmoitua työtä helposti hyväksi jatkokehityksessä. Ohjelman perusrakennetta voisi parantaa. Esimerkiksi rakennemallin tai

poikkileikkausarvojen tallennusmahdollisuus olisi tarpeellinen. Kuitenkin ohjelma on erittäin käyttökelpoinen tarkoitukseensa jo nyt. Jatkuvien välipohjien mitoitus yksinkertaisilla ja suomenkielisillä ohjelmilla on nyt mahdollista.



## Lähteet

- Borgström, E. & Fröbel, J. 2019. The CLT Handbook. Swedish Wood. Viitattu 29.4.2020. [https://www.swedishwood.com/publications/list\\_of\\_swedish\\_woods\\_publications/the-clt-handbook/](https://www.swedishwood.com/publications/list_of_swedish_woods_publications/the-clt-handbook/)
- CrossLam Kuhmo CLT massiivipuulevy. 2019. Tuotesertifikaatti. Eurofins Expert Services. Viitattu 16.4.2020. <https://www.crosslam.fi/media/ladattavat-pdf/tuotehyvaksynta.pdf>
- De Silva, C. 2007. Vibration. Fundamentals and Practice. Second Edition. Taylor & Francis Group.
- Inman, D. 2019. Engineering Vibrations. Third Edition. Pearson Education International.
- Kortesmaa, M. 2007. Puun ortotropia vaurioiden aiheuttajana. Rakenteiden mekaniikka, 40, 2, 40-47. Viitattu 29.4.2020. [http://rmseura.tkk.fi/rmlehti/2007/nro2/Rak-Mek\\_40\\_2\\_2007\\_3.pdf](http://rmseura.tkk.fi/rmlehti/2007/nro2/Rak-Mek_40_2_2007_3.pdf)
- Kouhia, R. & Tuomala, M. 2009. Rakennetekniikan Numeeriset Menetelmät. Luentomoniste. Viitattu 9.4.2020. [http://www.tut.fi/rakmek/personnel/kouhia/papers/lecture\\_notes/pruju.pdf](http://www.tut.fi/rakmek/personnel/kouhia/papers/lecture_notes/pruju.pdf)
- Lahtela, T. 2017. CLT- ja LVL-rakentaminen. Vaativien puurakenteiden suunnittelu -koulutus 2017. Puuinfo.
- Moaveni, S. 2015. Finite Element Analysis Theory and Application with Ansys. Fourth Edition. Pearson Education Limited.
- Mylly, M. 2016. CLT rakentamisen haasteet ja mahdollisuudet. Työtehoseura TTS. Viitattu 17.4.2020. [https://www.tts.fi/files/661/lappia\\_m\\_mylly\\_puunet20160923b.pdf](https://www.tts.fi/files/661/lappia_m_mylly_puunet20160923b.pdf)
- Palkkielementti. 2013. Turun yliopiston oppimateriaalit. Viitattu 22.3.2020. [http://www.tut.fi/rakmek/mec\\_2430/palkki.pdf](http://www.tut.fi/rakmek/mec_2430/palkki.pdf)
- Pennala, E. 1999. Koneiden ja rakenteiden värähtelyt. Helsinki: Yliopistokustannus/Otatieto.
- Rakenteiden lujuus ja vakaus. 2016. Suomen rakentamismääräyskokoelma. Helsinki: Ympäristöministeriö. Viitattu 16.4.2020. Saatavilla: [https://www.ym.fi/fi-FI/Maankaytto\\_ja\\_rakentaminen/Lainsaadanto\\_ja\\_ohjeet/Rakentamismaarayskokoelma/Rakenteiden\\_lujuus\\_ja\\_vakaus](https://www.ym.fi/fi-FI/Maankaytto_ja_rakentaminen/Lainsaadanto_ja_ohjeet/Rakentamismaarayskokoelma/Rakenteiden_lujuus_ja_vakaus)
- Salmi, T. & Kuula, K. 2017. Rakenteiden mekaniikka. 2. painos. Tampere: Pressus.
- Salonen, E-M. 1999. Dynamiikka 1. Helsinki: Yliopistokustannus/Otatieto.

SFS-EN 16351:2015. Timber Structures. Cross laminated timber. Requirements. Helsinki: Suomen Standardisoimisliitto SFS. Vahvistettu 9.11.2015. Viitattu 16.4.2020. <https://janet.finna.fi>, SFS Online

SFS-EN 1995-1-1 + A1 + A2 + AC:2014. Eurokoodi 5. Puurakenteiden suunnittelu. Osa 1-1: Yleiset säännöt ja rakennuksia koskevat säännöt. Helsinki: Suomen Standardisoimisliitto SFS. Vahvistettu 16.6.2014. Viitattu 16.4.2020. <https://janet.finna.fi>, SFS Online.

Sirkka, A & Pirttinen, V. 2017. CLT-monipuolinen, nopea ja ekologinen rakennusmateriaali. Lapin AMKIN julkaisuja. Viitattu 17.4.2020. <https://www.lapinamk.fi/loa-der.aspx?id=c6498ebb-ea39-4048-9580-fc4f82b8ce00>

Talja, A. 1996. Teräsrunkoisten välipohjien värähtelyjen hallinta. VTT tiedotteita. Espoo: Valtion teknillinen tutkimuskeskus. Viitattu 9.4.2020. <https://www.vttresearch.com/sites/default/files/pdf/tiedotteet/1996/T1790.pdf>

Talja, A., Toratti, T. & Järvinen, E. 2002. Lattioiden värähtelyt. Suunnittelu ja kokeellinen arviointi. VTT tiedotteita. Espoo: Valtion teknillinen tutkimuskeskus. Viitattu 22.3.2020. <https://www.vttresearch.com/sites/default/files/pdf/tiedotteet/2002/T2124.pdf>

Välipohjan kestävyys. 2015. Esimerkkilaskelma. Crosslam. Viitattu 16.4.2020. <https://www.crosslam.fi/media/ladattavat-pdf/mitoituslaskelmat-4-vn-cc-83lipohjan-kestn-cc-83vyys.pdf>

## Liitteet

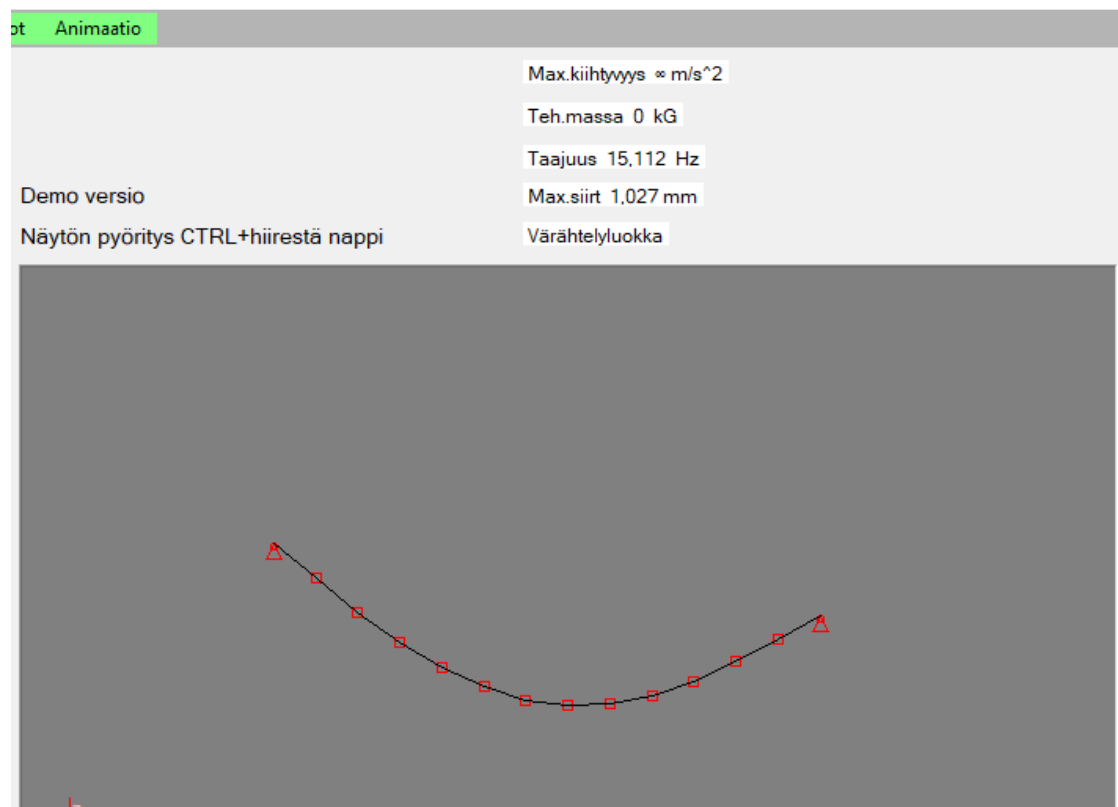
### Liite 1. Palkin vertailulaskelmat

#### Nivelellinen palkki

Massa	m	57	kg/m
Palkin pituus	L	3,8	m
Jäyhyysmomentti	I	0,0007971	m <sup>4</sup>
Kimmomoduuli	E	1380000000,000	N/m <sup>2</sup>
Taipuma	w	1,039	mm

Ominaistaajuus 15,112 Hz

Ohjelman vastaus vastaavalle rakenteelle.



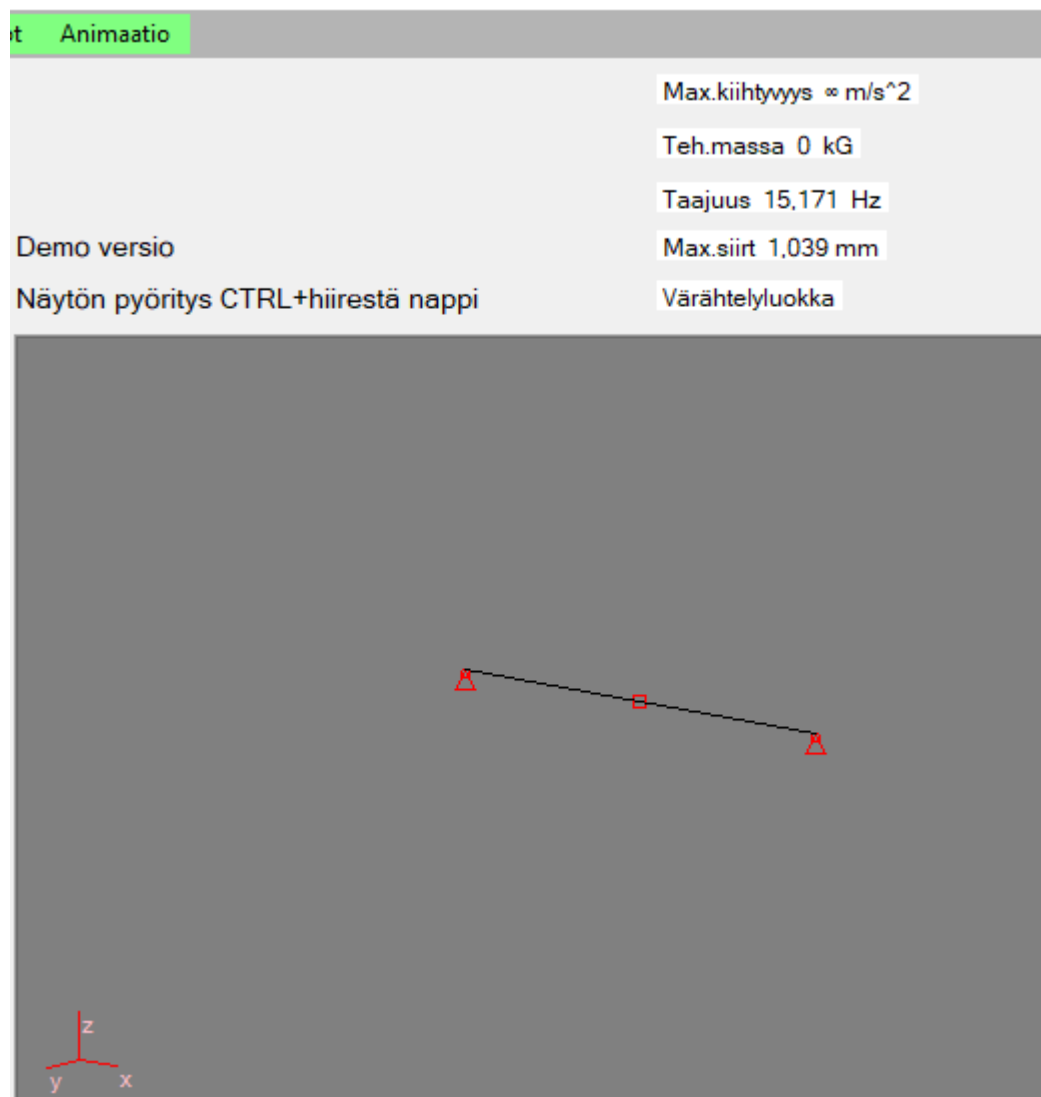
Ero = 0,001 Hz

Suhteellinen virhe = 0 %

Ero = 0,012 mm

Suhteellinen virhe = 1,1%

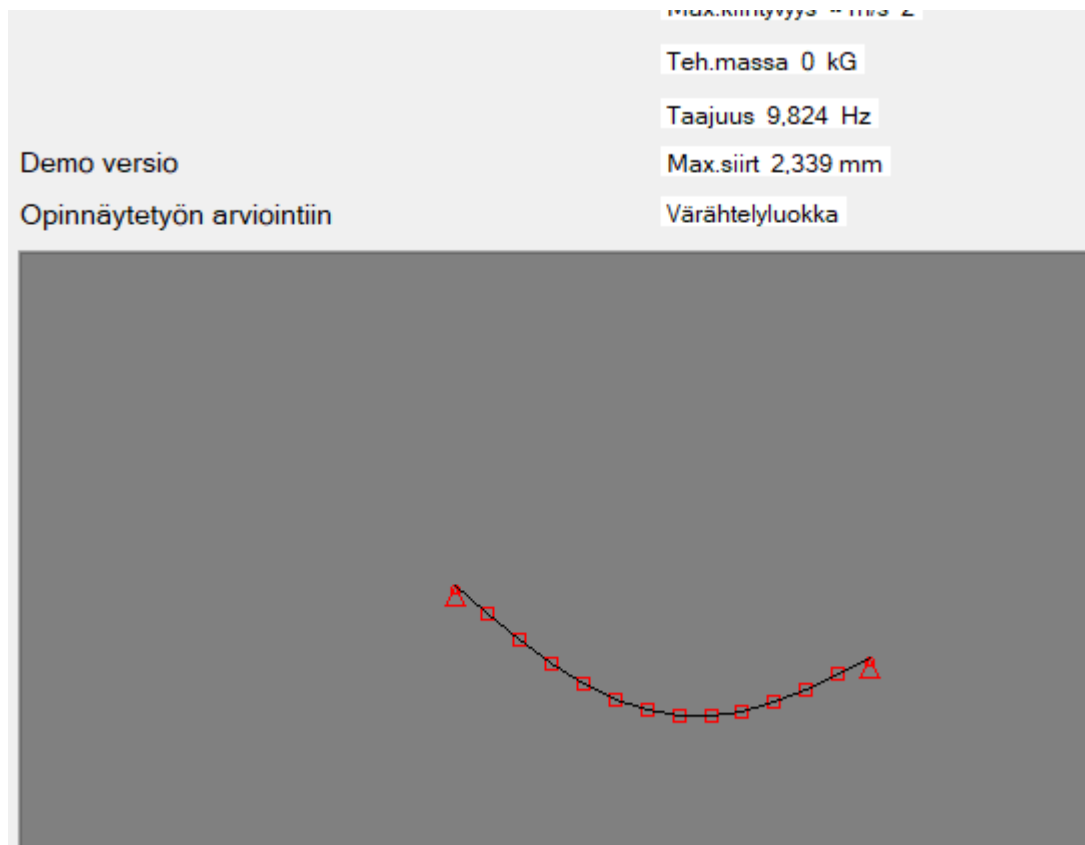
Taipuman virhe johtuu siitä, että laskentasolmu ei osu jänneväli keskelle.



Sama palkki laskettuna vain yhdellä laskentasolmulla. Virhe ei juuri kasva.

### Nivelellinen palkki

Massa	m	45	kg/m
Palkin pituus	L	5	m
Jäyhyysmomentti	I	0,0007971	m <sup>4</sup>
Kimmomoduuli	E	1380000000,000	N/m <sup>2</sup>
Taipuma	w	2,367	mm
Ominaistaajuus		9,824	Hz



Ero ominaistaajuudessa = 0 %

Ero taipumassa = 1,2 %

### Nivelellinen palkki

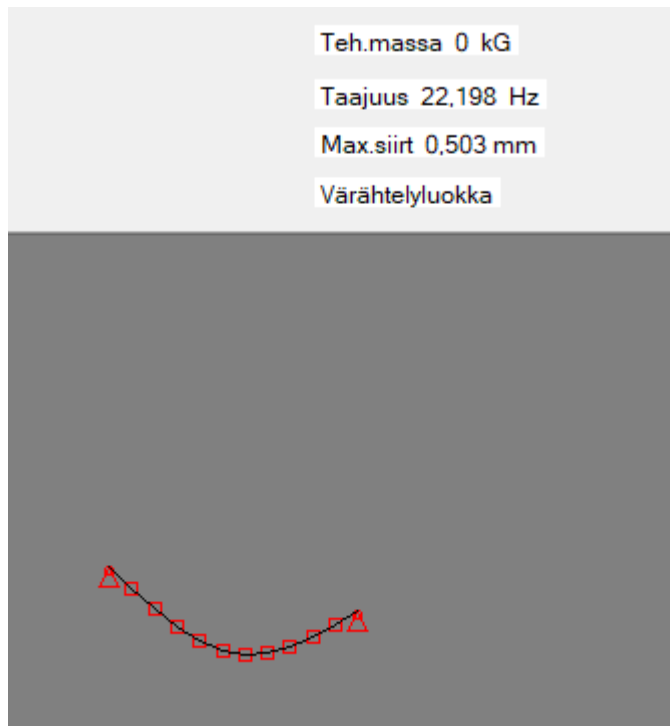
---

Massa	m	68	kg/m
Palkin pituus	L	3	m
Jäyhyysmomentti	I	0,0007971	m <sup>4</sup>
Kimmomoduuli	E	1380000000,000	N/m <sup>2</sup>
Taipuma	w	0,511	mm

---

Ominaistaajuus	22,198 Hz
----------------	-----------

---



Ero ominaistaajuudessa = 0 %

Ero taipumassa = 1,5 %

## Liite 2. Suorakulmaisen laatan vertailulaskelmat

Laatan laskelmat toteutettiin käyttäen RFEM-ohjelmaa ja sen lisäosaa DynamPro. Laskelmat toteutettiin samoilla mielivaltaisilla poikkileikkaus- ja materiaaliarvoilla käyttäen arinalaattaa seuraavilla geometrian arvoilla:

**Edit Surface Stiffness - Orthotropic**

General | Grillage | Stiffness Matrix | Transformed Stiffness Matrix

**Geometric Properties**

Slab thickness  
 $d_p$  : 200.0 [mm]

Rib spacing for x'/y' axis  
 $a_x'$  : 400.0 [mm]     $a_y'$  : 400.0 [mm]

Rib width for x'/y' axis  
 $b_x'$  : 50.0 [mm]     $b_y'$  : 50.0 [mm]

**Material Properties**

Modulus of elasticity  
 $E$  : 1380.00 [kN/cm²]

Shear modulus  
 $G$  : 575.00 [kN/cm²]

Poisson's ratio  
 $\nu$  : 0.200 [-]

Specific weight  
 $\gamma$  : 0.01 [kN/m³]

Thermal expansion coefficient  
 $\alpha$  : 0.00 [1/°C]

Partial factor  
 $\gamma_M$  : 1.00 [-]

Equivalent Thickness

Laskennassa käytettävät poikkileikkausarvot olivat seuraavat:

**Edit Material**

No. 4 | Color [blue] | Description omaarina

**Material Constants**

Modulus of elasticity     $E$  : 1380.00 [kN/cm²]

Shear modulus     $G$  : 575.00 [kN/cm²]

Poisson's ratio     $\nu$  : 0.200 [-]

Specific weight     $\gamma$  : 0.01 [kN/m³]

Coefficient of thermal expansion     $\alpha$  : 0.00 [1/°C]

Partial safety factor     $\gamma_M$  : 1.00 [-]

**Material Model**  
 Isotropic Linear Elastic

Comment

Ohjelman käyttämät poikkileikkausarvot:

Poikkileikkausarvot

	E	A	I <sub>y</sub>	I <sub>z</sub>	G
▶	13800000000	1	7,971E-05	7,971E-05	1
	13800000000	1	3,333E-05	2,222E-05	1
*					

< >

A m<sup>2</sup> E N/m<sup>2</sup> I<sub>y</sub> m<sup>4</sup> I<sub>z</sub> m<sup>4</sup> G kN/m<sup>2</sup> I<sub>v</sub> m<sup>4</sup> Nimi

--	--	--	--	--	--	--

RFEM-keskitetyt massat:

NVC1 - esim

Mode Shape 1 (f : 5.0)

E	F	G	H	
Z [m]	m <sub>x</sub> [kg]	m <sub>y</sub> [kg]	m <sub>z</sub> [kg]	
0.000	0.00	0.00	8.75	
0.000	0.00	0.00	17.50	
0.000	0.00	0.00	8.75	
0.000	0.00	0.00	8.75	

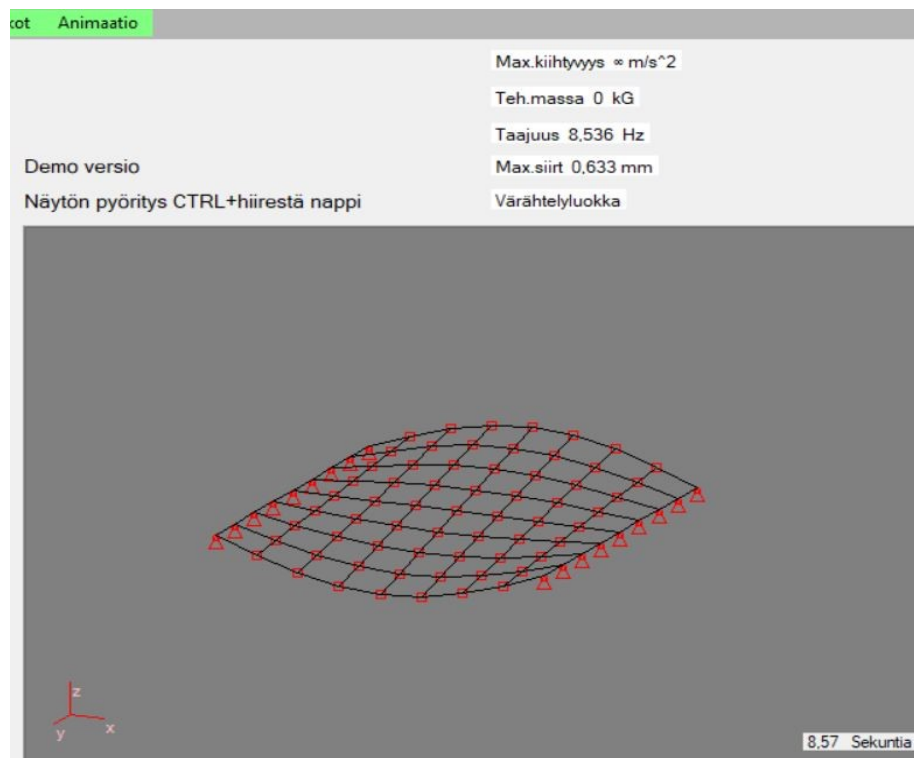
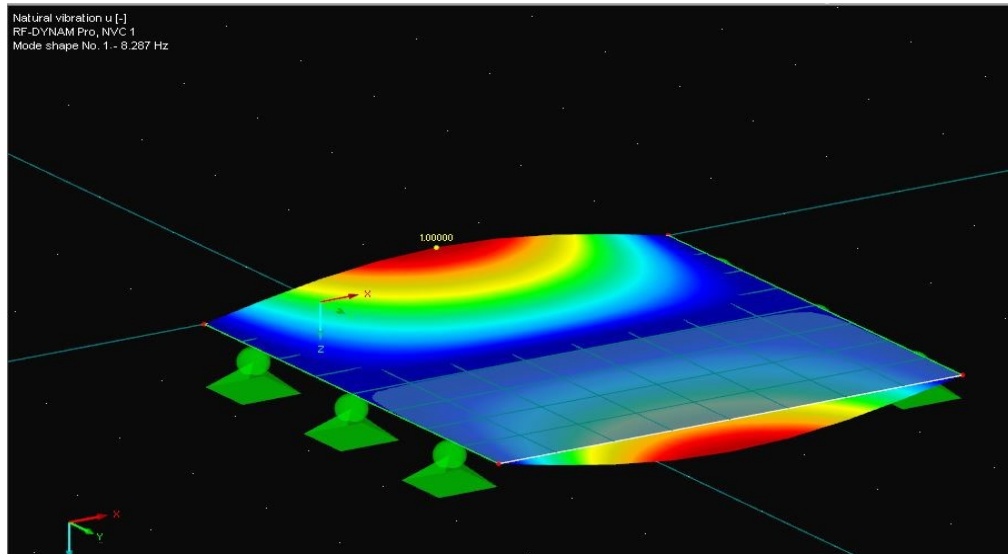
Shapes by Mesh Node | Masses in Mesh Points | Effective Modal Mass

Ohjelman massamatriisin massat:

Sauvat	120	121	122	123
Solmut	0	0	0	0
Vapausasteet	0	0	0	0
Glob. jäykkymatriisi	0	0	0	0
Glob. massamatriisi	0	0	0	0
Ominaisaajuudet	0	0	0	0
Red.K	0	0	0	0
Red.M	0	0	0	0
T	0	0	1,479166666666...	0
Tt	0,021130952380...	0	0	-0,0158482142...
Siirtymät	0	0,063392857142...	0	0
	0	0	12,50952380952...	0
	-0,01584821428...	0	0	0,0422619047...
	0	-0,01584821428...	0	0
	0	0	1,479166666666...	0
	0	0	0	-0,0158482142...
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0



## Kahdelta sivulta nivelellisesti tuettu 4m x 4m laatta:

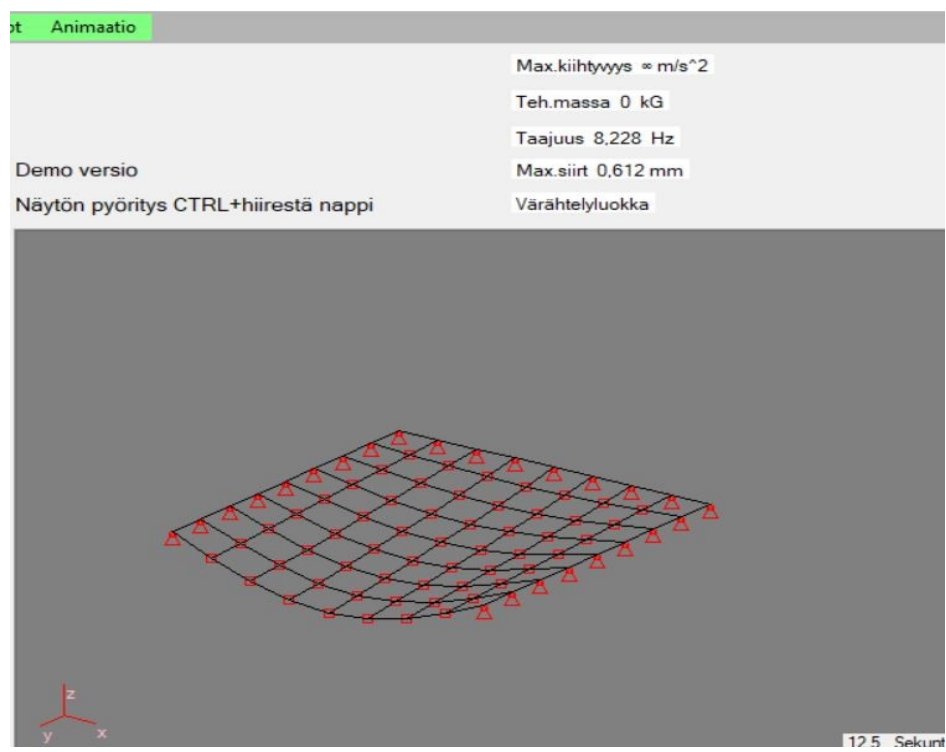
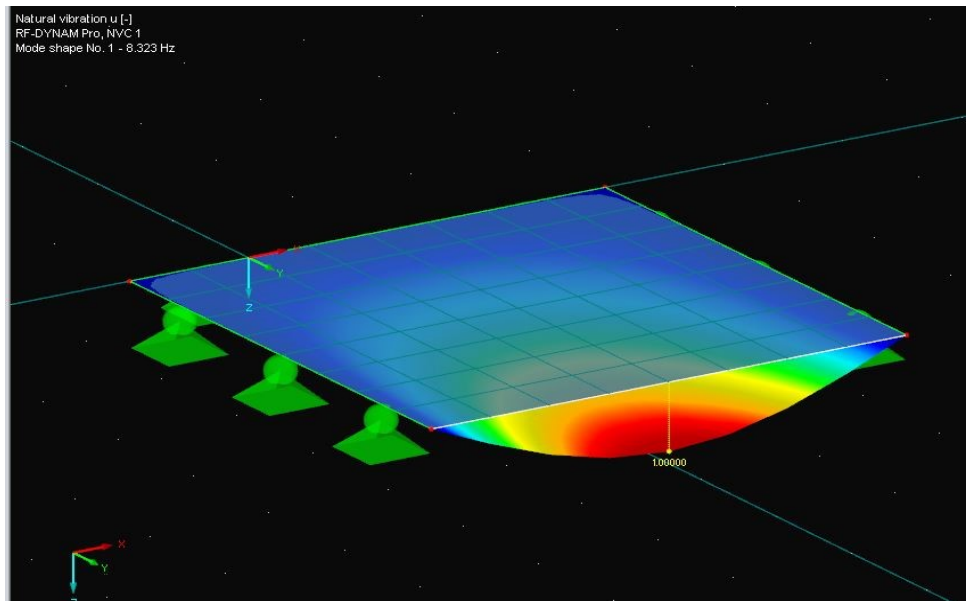


RFEM-alin ominaistaajuus: 8,287 Hz

Ohjelman tulos: 8,536 Hz

Suhteellinen virhe = 2,9%

Kolmelta sivultaan nivelellisesti tuettu 4m x 4m laatta:

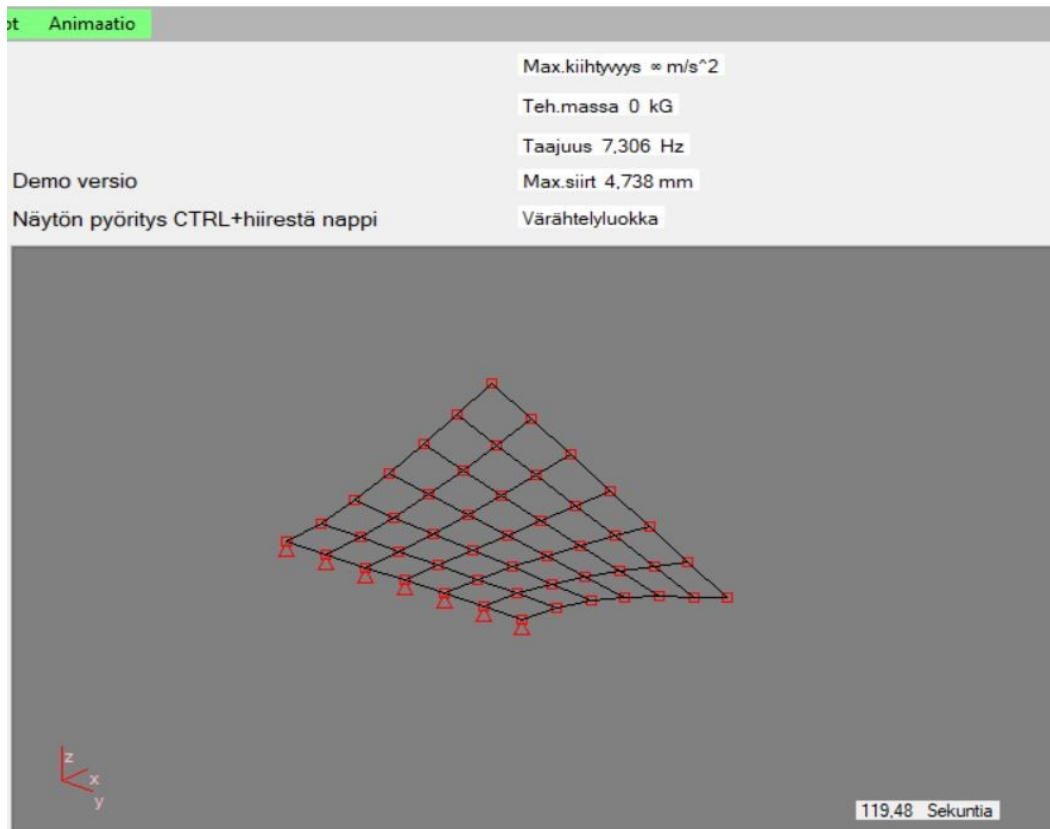
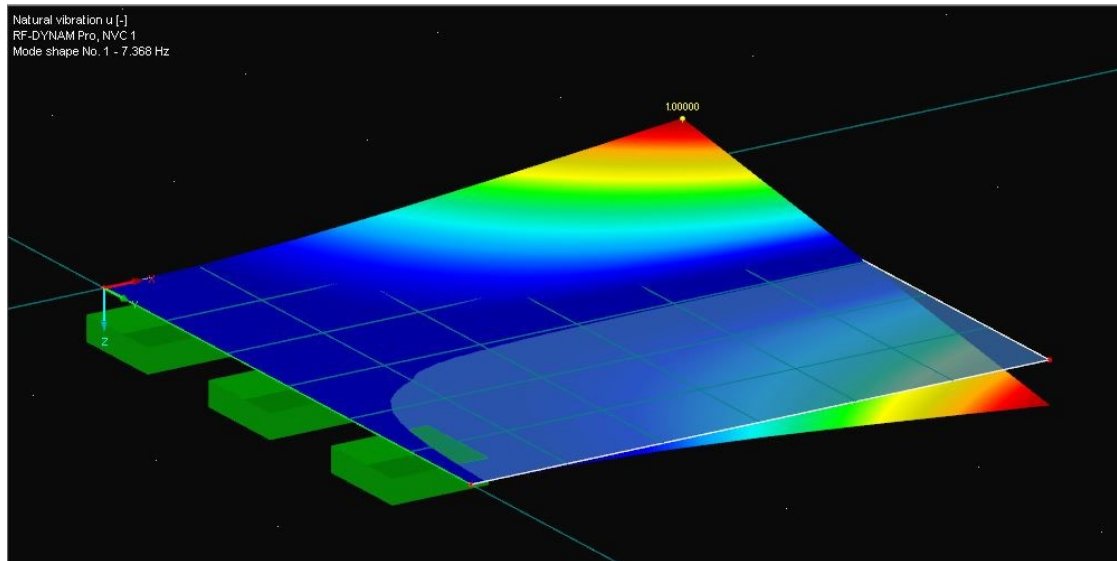


RFEM-alin ominaistaajuus = 8,323 Hz

Ohjelman tulos = 8,228 Hz

Suhteellinen virhe = 1,14%

Jäykästi tuettu ulokelaatta 3m x 3m:

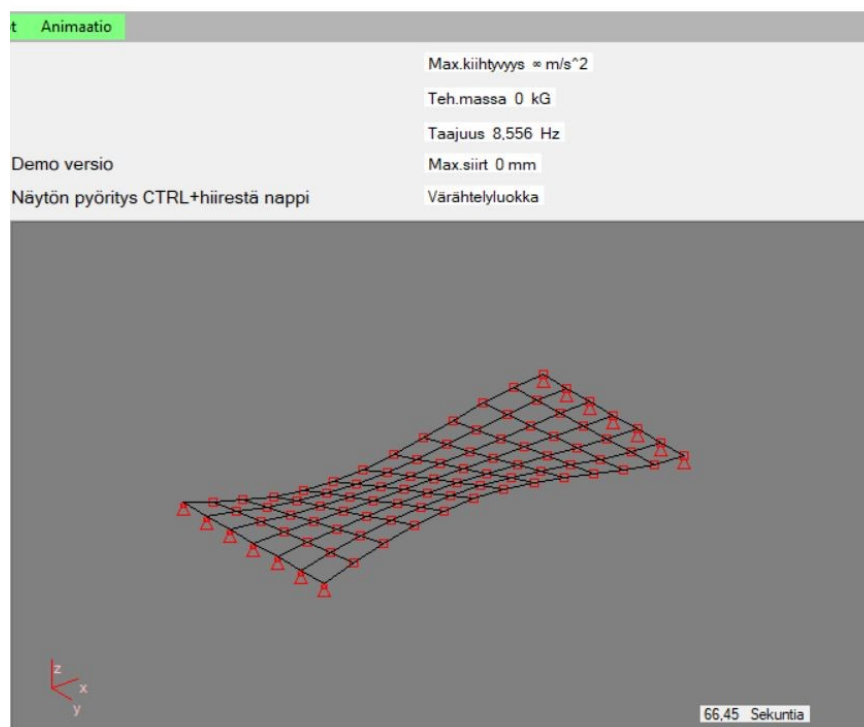
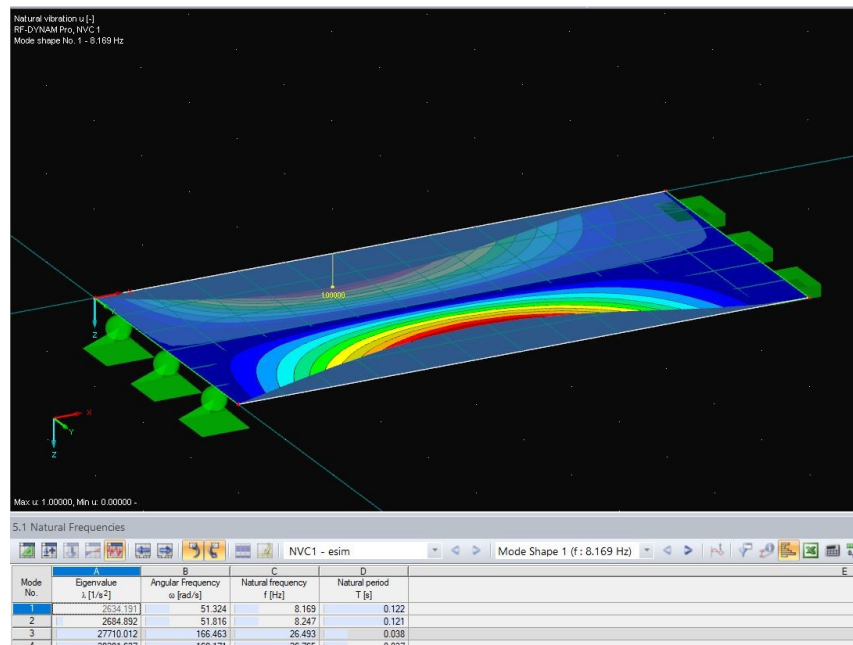


RFEM-alin ominaistaajuus = 7,368 Hz

Ohjelman tulos = 7,306 Hz

Suhteellinen virhe = 0,84%

## Jäykästi ja nivelellisesti tuettu 3m x 6m laatta:



RFEM-alin ominaistaajuus = 8,169 Hz

Ohjelman tulos = 8,556 Hz

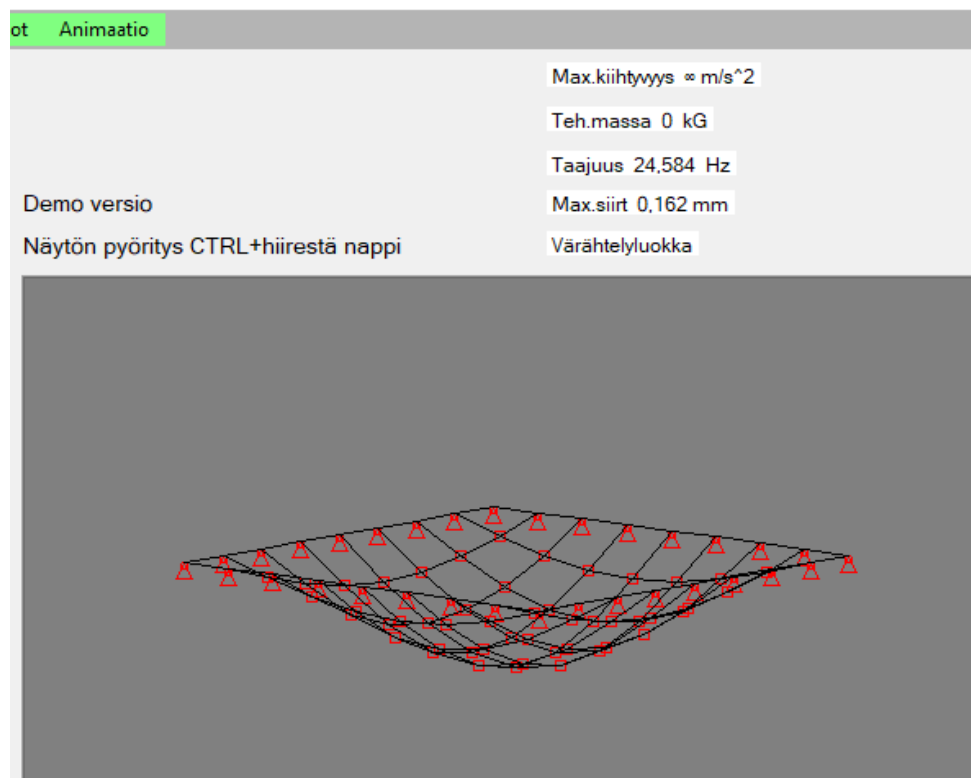
Suhteellinen virhe = 4,52 %

### Neljältä sivulta tuettu 4m x 4m laatta:

#### Vapaasti tuettu laatta

Leveys	B	4 m
Pituus	L	4 m
Jäykkyys	Eit	1099998 Nm <sup>2</sup>
Jäykkyys	Eib	1099998 Nm <sup>2</sup>
Massa	m	71 kg/m <sup>2</sup>

Taajuus	24,44 Hz
---------	----------



Laskentakaavan tulos = 24,44 Hz

Ohjelman tulos = 24,584 Hz

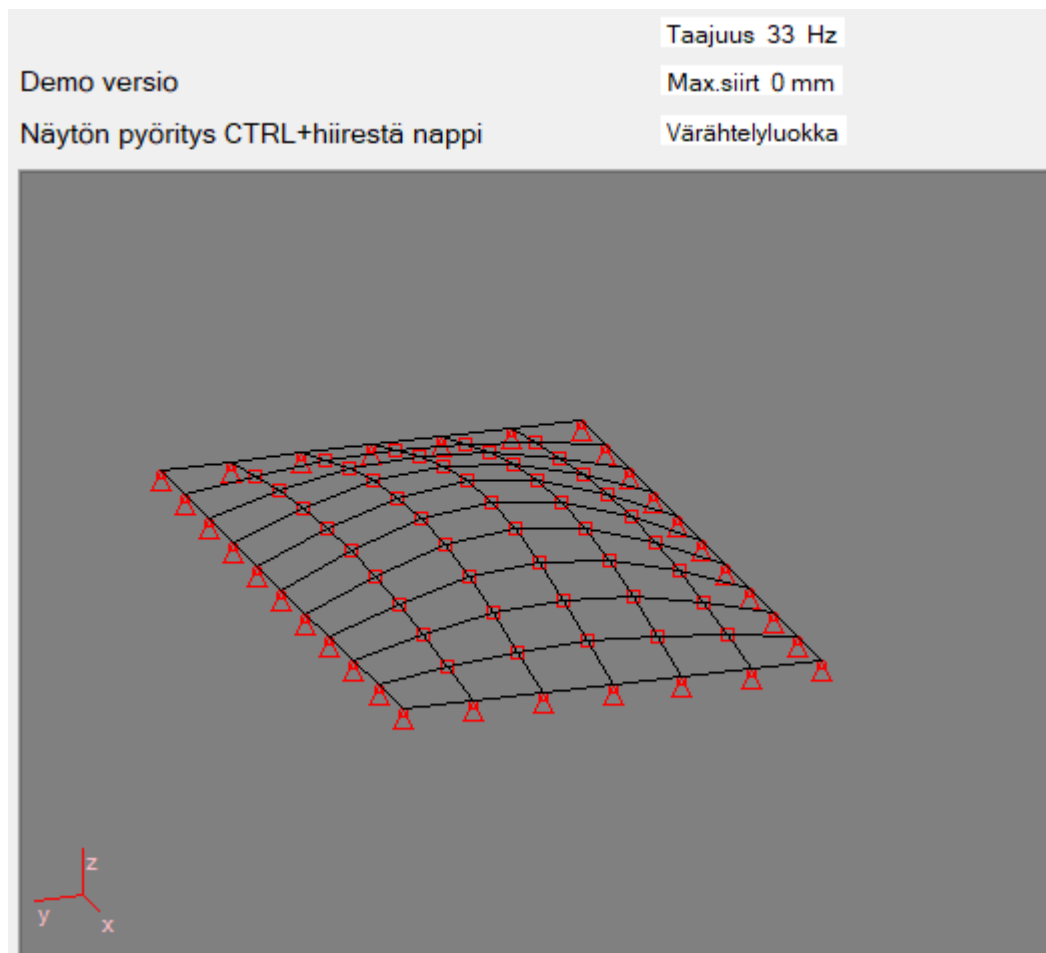
Suhteellinen virhe = 0,57%

### Neljältä sivulta nivelellisesti tuettu 3m x 6m laatta:

#### Vapaasti tuettu laatta

Leveys	B	3 m
Pituus	L	5 m
Jäykkyys	Eit	1099998 Nm <sup>2</sup>
Jäykkyys	Eib	1099998 Nm <sup>2</sup>
Massa	m	71 kg/m <sup>2</sup>

Taajuus	29,54 Hz
---------	----------



Laskentakaavan tulos = 29,54 Hz

Ohjelman tulos = 33 Hz

Suhteellinen virhe = 10%